
UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME XIII.

(LXXIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[O¹5n]

SURFACES ENGENDRÉES PAR LE DÉPLACEMENT D'UNE COURBE PLANE AVEC CONE CIRCONSCRIT LE LONG DE LA COURBE;

PAR M. E. KERAVAL,
Professeur au lycée Louis-le-Grand.

Pour abréger, j'appelle *surface* Σ toute surface engendrée par le déplacement d'une courbe plane (C), quand il existe un cône circonscrit à la surface tout le long de chaque courbe (C). Je me servirai de coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 que je supposerai fonctions de deux paramètres u, v. Le paramètre u restera constant sur chaque courbe (C); je supposerai que les courbes obtenues en faisant v constant soient conjuguées des premières.

Je sais que dans ces conditions x_1, x_2, x_3, x_4 sont des solutions d'une même équation de la forme

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} + p\frac{\partial \theta}{\partial u} + q\frac{\partial \theta}{\partial v} + r\theta = 0,$$

où p, q, r sont des fonctions de u et de v. Si je désigne par (S) la courbe lieu du sommet des cônes circonscrits à Σ le long des courbes (C), les tangentes aux courbes v

rencontrent la courbe S, donc si l'on désigne par h et k les invariants de (1) savoir

$$h = \frac{\partial p}{\partial u} + pq - r,$$

$$k = \frac{\partial q}{\partial v} + pq - r,$$

l'invariant k est ici nul ; nous dirons que l'équation (1) est de rang zéro à gauche. D'autre part, les courbes u étant planes, il existe une relation de la forme

$$(2) \qquad U_1 x_1 + U_2 x_2 + U_3 x_3 + U_4 x_4 \equiv 0,$$

où les coefficients de x_1, x_2, x_3, x_4 ne dépendent que de u. On sait que, dans ce cas, l'équation (1) est au plus de rang deux à droite, c'est-à-dire qu'après avoir appliqué deux fois au plus la transformation de Laplace on aura une nouvelle équation où le nouvel invariant h sera nul. Alors les équations de la surface Σ doivent être de la forme

$$(3) \qquad x_k = \begin{vmatrix} B_k & A_k & A'_k & A''_k \\ \beta_1 & \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha''_3 \end{vmatrix} \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

où les fonctions B_k, β_1, β_2, β_3 dépendent de v et A_k, α_1, α_2, α_3 de u. Mais il peut arriver que le plan des courbes u roule sur un cône; nous prendrons le sommet du cône à l'origine

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0.$$

Alors la relation (2) ne contiendra plus que trois coordonnées et l'équation (1) sera de rang un à droite,

donc

$$(4)\qquad x_k = \begin{vmatrix} B_k & A_k & A'_k \\ \beta_1 & \alpha_1 & \alpha'_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha'_2 \end{vmatrix}.$$

Enfin le plan des courbe u peut passer par une droite fixe. Dans ce cas, ci cette droite a pour équation

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0$$

la relation (2) ne contient plus que les deux variables x_1, x_2, l'équation (1) est de rang zéro à droite et les équations de la surface prennent la forme

$$(5)\qquad x_k = B_k + A_k.$$

Nous sommes ainsi conduits à ranger les surfaces Σ en trois catégories, nous aurons ainsi les surfaces Σ de troisième, seconde et première espèce. Dans les équations précédentes on suppose toujours qu'il n'existe pas de relation linéaire homogène à coefficients constants soit entre les quantités α, soit entre les β.

Étude des surfaces Σ de troisième espèce.

Les équations de la surface sont de la forme (3), mais il reste à exprimer que les courbes u sont planes. En portant les valeurs de x_1, x_2, x_3, x_4 dans la relation (2), on trouve une relation linéaire en B_1, B_2, B_3, B_4, β_1, β_2, β_3 et homogène. En divisant par un déterminant différent de zéro, cette relation prend la forme

$$U_1 B_1 + U_2 B_2 + U_3 B_3 + U_4 B_4 + \varphi(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 0,$$

φ étant linéaire et homogène en β_1, β_2, β_3. Dans cette relation donnons à u quatre valeurs telles que le déterminant des coefficients de U_1, U_2, U_3, U_4 soit différent de zéro, ce qui est possible, puisque le plan des

courbes u ne roule pas sur un cône, nous pourrons tirer pour B_1, B_2, B_3, B_4 des valeurs de la forme

$$B_k = a_k\beta_1 + b_k\beta_2 + c_k\beta_3,$$

les coefficients a_k, b_k, c_k étant des constantes. Alors en changeant la signification de A_k nous pourrons prendre, pour équations de la surface Σ,

$$\text{(A)} \qquad x_k = \begin{vmatrix} 0 & A_k & A'_k & A''_k \\ \beta_1 & \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha''_3 \end{vmatrix}$$

et cette fois les courbes u sont bien planes. La forme de ces équations nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Les courbes planes* $u =$ const. *qui engendrent la surface sont homographiques, et la correspondance homographique est établie par les courbes conjuguées* $v =$ const.

On peut imaginer par exemple dans un plan P un point de coordonnées homogènes β_1, β_2, β_3 décrivant une courbe (β). Pour chaque valeur de u on a dans un plan P_u une transformation homographique de cette courbe (β). Nous verrons plus loin si cette homographie peut devenir *singulière* pour certaines valeurs de u.

Pour le moment nous allons chercher les plans P_u et la courbe lieu du sommet des cônes circonscrits. On pourrait se servir des méthodes indiquées par M. Darboux pour des questions analogues, je préfère indiquer une méthode ne dépassant pas le cadre de la classe de Mathématiques spéciales.

Équations de la courbe (S).

Les tangentes aux courbes v rencontrent cette courbe. L'une des courbes v a pour équations

$$y_k = \begin{vmatrix} A_k & A'_k & A''_k \\ \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 \end{vmatrix}.$$

Or la théorie des déterminants nous donne l'identité

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} A_k & A'_k & A''_k & A'''_k \\ \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 & \alpha'''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 & \alpha'''_2 \\ \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha''_3 & \alpha'''_3 \end{vmatrix} \times (\alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1)$$
$$= \begin{vmatrix} A_k & A'_k & A''_k \\ \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha'''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha'''_2 \\ \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha'''_3 \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} A_k & A'_k & A'''_k \\ \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha'''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha'''_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 \\ \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha''_3 \end{vmatrix}.$$

Si donc on pose

$$(B)\qquad X_k = \begin{vmatrix} A_k & A'_k & A''_k & A'''_k \\ \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 & \alpha'''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 & \alpha'''_2 \\ \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha''_3 & \alpha'''_3 \end{vmatrix},$$

cette identité prend la forme

$$y_k \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha'''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha'''_2 \\ \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha'''_3 \end{vmatrix} - y'_k \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 \\ \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha''_3 \end{vmatrix} = X_k(\alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1),$$

qui prouve que le point X_1, X_2, X_3, X_4 se trouve bien sur la tangente à la courbe décrite par le point y_1, y_2, y_3, y_4. Il en est de même pour deux autres courbes v

dont les coordonnées du sommet du cône sont données par les formules (B).

Plan des courbes u.

Le plan P_u d'une courbe u c'est le plan osculateur de la courbe (λ),

$$\lambda_k = A_k.$$

c'est-à-dire de la courbe décrite par le point de coordonnées A_1, A_2, A_3, A_4. Ceci résulte immédiatement de la forme des équations de la surface Σ, le plan osculateur contenant les trois points de coordonnées A_k, A'_k, A''_k.

Enveloppes des courbes u.

Un point d'une courbe u décrivant une enveloppe ne peut être que sur la caractéristique du plan P_u. Pour ces points, u et v sont liés par la relation

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \alpha'_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha'_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \alpha'_3 \end{vmatrix} = 0,$$

que j'écrirai pour abréger

$$| \beta \alpha \alpha' | = 0.$$

Pour chaque valeur de u cette relation détermine un certain nombre de points situés sur la caractéristique du plan P_u. Soit M l'un de ces points, ses coordonnées sont fonctions de u et v qui sont eux-mêmes liés par la relation précédente. On peut supposer u et v fonctions d'un paramètre t, on aura

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x_k}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

Or pour ce point M, on a

$$x_k = - A_k | \beta \alpha' \alpha'' | + A'_k | \beta \alpha \alpha'' |,$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial u} = - A_k | \beta \alpha' \alpha''' | + A'_k | \beta \alpha \alpha''' | + A''_k | \beta \alpha \alpha'' |,$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial v} = - A_k | \beta' \alpha' \alpha'' | + A'_k | \beta' \alpha \alpha'' |,$$

donc $\frac{dx_k}{dt}$ est une fonction linéaire et homogène de A_k, A'_k, A''_k. Le point de coordonnées $\frac{dx_1}{dt}\ \frac{dx_2}{dt}\ \frac{dx_3}{dt}\ \frac{dx_4}{dt}$ est donc dans le plan P_u, il en est de même de la tangente à la courbe décrite par le point M, et comme elle est dans le plan tangent à la surface elle coïncide avec la tangente à la courbe u. Donc tous les points M que nous avons définis décrivent des courbes tangentes aux courbes u. Si par exemple, β_1, β_2, β_3 sont des polynomes de degré m en v, c'est-à-dire si les courbes u sont unicursales et de degré m, on aura m enveloppes. Pour $m = 2$, on retrouve les résultats de M. Blutel. (*Annales de l'École Normale*, mai-juin 1890. *Voir* aussi la thèse de M. Lelieuvre 1894 qui s'occupe du cas d'une courbe plane unicursale se déplaçant de telle sorte qu'elle soit divisée homographiquement par ses conjuguées.)

Une transformation par polaires réciproques change une surface Σ en une surface Σ et nous montre que le cône circonscrit à Σ roule sur des développables décrites par les génératrices de contact du cône avec les plans tangents qu'on peut lui mener par la tangente à la courbe que décrit le sommet du cône.

Définition d'une congruence Σ.

Dans les équations (A) traitons β_1, β_2, β_3 comme des constantes et désignons-les par a, b, c ; au lieu de

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ mettons α, β, γ, nous aurons les équations

$$(C) \qquad x_k = \begin{vmatrix} 0 & A_k & A'_k & A''_k \\ a & \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ b & \beta & \beta' & \beta'' \\ c & \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Dans ces formules, a, b, c sont donc trois constantes arbitraires et A_1, A_2, A_3, A_4, α, β, γ des fonctions de u. Pour chaque valeur de u, les points x_k qui correspondent aux différentes valeurs a, b, c décrivent un plan P_u et les tangentes aux courbes décrites par ces points concourent en un point S

$$(D) \qquad X_k = \begin{vmatrix} A_k & A'_k & A''_k & A'''_k \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta & \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix}.$$

Si a, b, c restent fixes et que u varie, les formules (C) définissent une courbe v, on a donc une congruence de courbes v et les surfaces de cette congruence sont les surfaces Σ. Il est naturel de chercher quelle peut être la surface focale de la congruence Σ. Il est évident que si pour une valeur particulière de u le point S se trouve dans le plan P_u toutes les courbes de la congruence seront tangentes à ce plan qui formera une des nappes de la surface focale. La valeur de X_k est de la forme

$$X_k = \lambda_1 A_k + \lambda_2 A'_k + \lambda_3 A''_k - \Delta A'''_k,$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

J'écris que ce point est dans le plan P_u, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 & A'_4 \\ A''_1 & A''_2 & A''_3 & A''_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Les coefficients de λ_1, λ_2, λ_3 sont nuls et il reste

$$\Delta \times \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 & A'_4 \\ A''_1 & A''_2 & A''_3 & A''_4 \\ A'''_1 & A'''_2 & A'''_3 & A'''_4 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne : 1° les plans P_u stationnaires c'est-à-dire osculateurs stationnaires de la courbe A_k; 2° les plans P_u pour lesquels $\Delta = 0$ qui correspondent aux valeurs de u pour lesquels un point décrivant la courbe plane $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$ serait un point d'inflexion. Je vais faire voir que pour ces valeurs de u qui rendent Δ nul, toutes les courbes v sont concourantes et concourent au point S correspondant. Il suffit de se reporter à l'identité (6) où l'on tiendra compte du changement de notations. Ainsi la surface focale se compose des points qui correspondent à Δ nul et des plans P_u stationnaires. D'ailleurs il n'existe pas d'autres points focaux, car si F est un point focal et si S n'est pas dans le plan P_u correspondant, le plan tangent en F à la surface de la congruence dépendra évidemment du mode d'assemblage des courbes v.

Cas d'homographie singulière.

Supposons qu'on donne à u une valeur fixe, les formules (C) font correspondre point par point le plan P_u et un plan Q. Dans le premier on a le point x_1, x_2,

x_3, x_4 ; dans le deuxième, le point de coordonnées a, b, c homogènes. Il faut s'assurer que ces formules (C) permettent de tirer a, b, c en fonction de trois des variables x_k. Désignons par

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \text{ l'adjoint de } \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

les équations (C) s'écriront

$$\begin{aligned} x_k = &- a(A_k\alpha_1 + A'_k\alpha_2 + A''_k\alpha_3) \\ &- b(A_k\beta_1 + A'_k\beta_2 + A''_k\beta_3) \\ &- c(A_k\gamma_1 + A'_k\gamma_2 + A''_k\gamma_3), \end{aligned}$$

ce qui fait quatre équations. Pour qu'on puisse tirer a, b, c des trois premières, par exemple, il faut que

$$\begin{vmatrix} A_1\alpha_1 + A'_1\alpha_2 + A''_1\alpha_3 & A_1\beta_1 + A'_1\beta_2 + A''_1\beta_3 & A_1\gamma_1 + A'_1\gamma_2 + A''_1\gamma_3 \\ A_2\alpha_1 + A'_2\alpha_2 + A''_2\alpha_3 & A_2\beta_1 + A'_2\beta_2 + A''_2\beta_3 & A_2\gamma_1 + A'_2\gamma_2 + A''_2\gamma_3 \\ A_3\alpha_1 + A'_3\alpha_2 + A''_3\alpha_3 & A_3\beta_1 + A'_3\beta_2 + A''_3\beta_3 & A_3\gamma_1 + A'_3\gamma_2 + A''_3\gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} A_1 & A'_1 & A''_1 \\ A_2 & A'_2 & A''_2 \\ A_3 & A'_3 & A''_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Si le second de ces déterminants est nul, son adjoint Δ l'est aussi et l'homographie est singulière. Pour cette valeur de u nous avons vu que les courbes v concouraient au point S correspondant. Si $\Delta \neq 0$, l'homographie ne sera singulière que si les quatre déterminants à trois lignes du Tableau

$$T : \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 & A'_4 \\ A''_1 & A''_2 & A''_3 & A''_4 \end{vmatrix}$$

sont nuls à la fois. Or ceci ne peut arriver que pour

certaines valeurs particulières de u, car nous supposons évidemment que le point A_1, A_2, A_3, A_4 décrive une courbe gauche.

Conclusion. — Ayant choisi les fonctions A_k telles que le point A_k décrive une courbe gauche, et les fonctions α, β, γ telles qu'il n'existe pas entre elles une relation linéaire et homogène, les équations d'une surface Σ seront données par les formules (C), où a, b, c sont des fonctions arbitraires d'un paramètre v. Cela revient à choisir arbitrairement la courbe décrite par le point a, b, c dans le plan ou encore l'une des courbes u dans le plan P_u correspondant.

DEUXIÈME SOLUTION.

On arrive aux mêmes conclusions en modifiant très légèrement les formules données par M. Blutel pour le cas des coniques. Ces formules sont les suivantes :

$$x = \frac{P_1 v^2 + Q_1 v + R_1}{P\ v^2 + Q\ v + R},$$

$$y = \frac{P_2 v^2 + Q_2 v + R_2}{P\ v^2 + Q\ v + R},$$

$$z = \frac{P_3 v^2 + Q_3 v + R_3}{P\ v^2 + Q\ v + R}.$$

Les fonctions P, Q, R, P_1, ..., R_3, de la variable u étant déterminées par les équations

$$\frac{P'_1}{P'} = \frac{Q'_1}{Q'} = \frac{R'_1}{R'} = X,$$

$$\frac{P'_2}{P'} = \frac{Q'_2}{Q'} = \frac{R'_2}{R'} = Y,$$

$$\frac{P'_3}{P'} = \frac{Q'_3}{Q'} = \frac{R'_3}{R'} = Z.$$

De telle sorte qu'on peut se donner X, Y, Z sommet

du cône circonscrit et P, Q, R, on aura alors $P_1, \ldots, R_3$ par neuf quadratures. Si je considère les trois courbes P, Q, R

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{P_1}{P} \\ y &= \frac{P_2}{P} \\ z &= \frac{P_3}{P} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{Q_1}{Q} \\ y &= \frac{Q_2}{Q} \\ z &= \frac{Q_3}{Q} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{R_1}{R} \\ y &= \frac{R_2}{R} \\ z &= \frac{R_3}{R} \end{aligned}\right.$$

les tangentes aux points de ces trois courbes, qui correspondent à une même valeur de u, concourent au point X, Y, Z. La congruence Σ peut alors s'écrire

$$(C') \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{aP_1 + bQ_1 + cR_1}{aP + bQ + cR}, \\ y &= \frac{aP_2 + bQ_2 + cR_2}{aP + bQ + cR}, \\ z &= \frac{aP_3 + bQ_3 + cR_3}{aP + bQ + cR}. \end{aligned}\right.$$

Si dans ces formules je donne à u une valeur particulière, la tangente au point x, y, z va passer par X, Y, Z quelles que soient les valeurs des constantes a, b, c; en effet en désignant par D l'expression $aP + bQ + cR$, on a

$$\begin{aligned} D^2 \frac{dx}{du} &= D(aP' + bQ' + cR')X \\ &\quad - (aP_1 + bQ_1 + cR_1)(aP' + bQ' + cR'), \\ D^2 \frac{dx}{du} &= (aP' + bQ' + cR')(DX - Dx), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{X - x}{\dfrac{dx}{du}} = \frac{Y - y}{\dfrac{dy}{du}} = \frac{Z - z}{\dfrac{dz}{du}},$$

qui exprime la propriété indiquée. Les formules (C′) sont équivalentes aux formules (C). On peut d'ailleurs

les identifier. Posons par exemple

$$P_1 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & A'_1 & A''_1 \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}}, \qquad P = \frac{\begin{vmatrix} A_4 & A'_4 & A''_4 \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}}.$$

Nous aurons, en vertu d'une identité analogue à l'identité (6),

$$P'_1 = \begin{vmatrix} A_1 & A'_1 & A''_1 & A'''_1 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta & \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix} \times (\gamma\beta' - \beta\gamma')$$

et

$$P' = \begin{vmatrix} A_4 & A'_4 & A''_4 & A'''_4 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta & \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix} \times (\gamma\beta' - \beta\gamma').$$

On voit de suite quelles valeurs il faudrait prendre pour P_2, ... et l'on a bien

$$\frac{P'_1}{P'} = X, \qquad \ldots \qquad \text{avec} \qquad X = \frac{X_1}{X_4},$$

X_1 et X_4 étant les valeurs de la première solution.

Détermination d'une congruence Σ quand on donne la courbe lieu des sommets S et la développable enveloppe des plans P_u avec la correspondance entre les sommets et les plans.

Voici la solution avec mes formules. Je me donne les fonctions A_k et, en outre, les trois fonctions F_1, F_2,

F_3 de la variables u telles que

$$\frac{X_1}{X_4} = F_1, \qquad \frac{X_2}{X_4} = F_2, \qquad \frac{X_3}{X_4} = F_3.$$

On trouve alors, pour déterminer la fonction α, l'équation différentielle du troisième ordre

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ A_1 - F_1 A_4 & A'_1 - F_1 A'_4 & A''_1 - F_1 A''_4 & A'''_1 - F_1 A'''_4 \\ A_2 - F_2 A_4 & A'_2 - F_2 A'_4 & A''_2 - F_2 A''_4 & A'''_2 - F_2 A'''_4 \\ A_2 - F_3 A_4 & A'_3 - F_3 A'_4 & A''_3 - F_3 A''_4 & A'''_3 - F_3 A'''_4 \end{vmatrix} = 0;$$

β et γ vérifient la même équation. Je laisse au lecteur le soin de développer cette méthode; voici celle qu'on peut déduire des calculs de M. Blutel. Soit

$$Ux + Vy + Wz + 1 = 0$$

le plan P_u. On se donne U, V, W, X, Y, Z comme des fonctions de u. Il s'agit de déterminer P, Q, R, $P_1, \ldots, R_3$.

Le plan P_u contient le point $\frac{P_1}{P}, \frac{P_2}{P}, \frac{P_3}{P}$; donc

$$P + UP_1 + VP_2 + WP_3 = 0.$$

Dérivons trois fois en u et posons pour abréger

$$\begin{aligned} H &= U\ X + V\ Y + W\ Z, \\ K &= U'X + V'Y + W'Z, \\ L &= U''X + V''Y + W''Z. \end{aligned}$$

Nous aurons

$$\begin{gathered} UP_1 + VP_2 + WP_3 + P = 0, \\ U'P_1 + V'P_2 + W'P_3 + P' + P'H = 0, \\ U''P_1 + V''P_2 + W''P_3 + P'K + P'' + P''H + P'H' = 0, \\ U'''P_1 + V'''P_3 + W'''P_3 + P'L \\ P''' + P''K + P''' + H + 2P''H' + P'H'' = 0 \end{gathered}$$

L'élimination de P_1, P_2, P_3 entre ces quatre équations donne, pour déterminer P, une équation différentielle du troisième ordre; P une fois connu, les équations précédentes donnent P_1, P_2, P_3. On a des calculs identiques pour Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3. L'équation différentielle qui est linéaire et homogène par rapport à la fonction inconnue et à ses trois dérivées est d'ailleurs la même dans les trois cas. Soient donc P, Q, R trois intégrales de cette équation, les valeurs les plus générales de P, Q, R seront

$$a_1 P + b_1 Q + c_1 R,$$
$$a_2 P + b_2 Q + c_2 R,$$
$$a_3 P + b_3 Q + c_3 R;$$

d'où, pour P_1,

$$a_1 P_1 + b_1 Q_1 + c_1 R_1; \quad \ldots,$$

d'où, en remplaçant dans les formules (C'),

$$x = \frac{a(a_1P_1+b_1Q_1+c_1R_1)+b(a_2P_1+b_2Q_1+c_2R_1)+c(a_3P_1+b_3Q_1+c_3R_1)}{a(a_1P\ +b_1Q_1+c_1R\ )+b(a_2P\ +b_2Q\ +c_2R\ )+c(a_3P\ +b_3Q\ +c_3Q\ )},$$
$$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou, avec un changement de notations,

$$x = \frac{AP_1 + BQ_1 + CR_1}{AP\ + BQ\ + CR},$$
$$y = \frac{AP_2 + BQ_2 + CR_2}{AP\ + BQ\ + CR},$$
$$z = \frac{AP_3 + BQ_3 + CR_3}{AP\ + BQ\ + CR},$$

avec trois constantes A, B, C ou plutôt deux constantes, $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ par exemple. On a donc une seule congruence Σ.

Conclusion. — Il résulte de là que le problème que nous nous sommes proposé conduit exactement aux mêmes calculs que le problème analogue dans le cas des coniques. Toute la difficulté consistera à résoudre l'équation différentielle du troisième ordre.

Remarque. — Dans un article précédent j'avais considéré les surfaces Σ dans le cas où la courbe plane était indéformable, il fallait donc que cette courbe admette un groupe de transformations homographiques; on sait qu'il en est bien ainsi pour les courbes triangulaires que j'ai trouvées.

Surfaces de deuxième espèce.

Je supposerai que le plan P_u roule sur un cône ayant son sommet à l'origine.

On trouve facilement, pour la congruence Σ, les équations

$$(E) \qquad x_k = \frac{\begin{vmatrix} 0 & A_k & A'_k \\ a & \alpha & \alpha' \\ b & \beta & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & A_4 & A'_4 \\ a & \alpha & \alpha' \\ b & \beta & \beta' \end{vmatrix}} \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Le sommet du cône a pour coordonnées

$$X_k = \frac{\begin{vmatrix} A_k & A'_k & A''_k \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_4 & A'_4 & A''_4 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \end{vmatrix}}.$$

Les plans P_u roulent sur un cône ayant pour sommet

l'origine des coordonnées et contenant la courbe

$$x_k = A_k \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Avec la méthode de M. Blutel, j'adopterai les formules

$$(\mathrm{E}') \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{aP_1 + bQ_1}{aP + bQ + 1}, \\ y &= \frac{aP_2 + bQ_2}{aP + bQ + 1}, \\ z &= \frac{aP_3 + bQ_3}{aP + bQ + 1}, \end{aligned} \right.$$

avec

$$\frac{P'_1}{P'} = \frac{Q'_1}{Q'} = X,$$

$$\frac{P'_2}{P'} = \frac{Q'_2}{Q'} = Y,$$

$$\frac{P'_3}{P'} = \frac{Q'_3}{Q'} = Z.$$

On se donne alors X, Y, Z sommet du cône puis P, Q; on a alors P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3 par six quadratures. Le plan P_u passe par l'origine et les deux points de coordonnées P_1, P_2, P_3 et Q_1, Q_2, Q_3.

Les deux points $\frac{P_1}{P}$, $\frac{P_2}{P}$, $\frac{P_3}{P}$ et $\frac{Q_1}{Q}$, $\frac{Q_2}{Q}$, $\frac{Q_3}{Q}$ décrivent deux courbes dont les tangentes se coupent au point X, Y, Z.

Avec ces notations on peut reprendre les calculs faits plus haut pour trouver la congruence Σ quand on se donne la courbe lieu des sommets des cônes et la développable enveloppe des plans P_u avec la correspondance entre les sommets et les plans, c'est-à-dire X, Y, Z, U, V, W; le plan P_u ayant pour équation

$$Ux + Vy + Wz = 0.$$

On trouve alors, pour calculer P et Q, une équation

du second ordre linéaire et homogène par rapport à la fonction inconnue, et ses deux premières dérivées se ramenant par suite à une équation de Riccati.

Exemple. — On trouve un exemple intéressant en partant des surfaces Σ de révolution. Si le plan P_u roule sur un cône de révolution, S étant lié au plan, on est ramené à une équation différentielle du type suivant (Oz est l'axe du cône) qu'on est certain de pouvoir intégrer

$$y'' - \frac{2\alpha(x-a)}{1+x^2}y' + \frac{2\beta(x^2-2ax+b)}{(1+x^2)^2}y = 0,$$

où α, β, a sont des constantes et y la fonction inconnue de x. On suppose toutefois α, β liées par la relation

$$\alpha^2+\alpha = 2\beta$$

ou

$$\beta = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}.$$

On peut ramener cette équation à la forme

$$\frac{y''}{y} = \frac{K}{(1+x^2)^2},$$

qui s'intègre facilement.

Surfaces de première espèce.

Généralisation des surfaces de translation.

Ces surfaces ont des équations de la forme

$$x_k = A_k + B_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

où les A_k sont des fonctions de u et les B_k de v. Le long des courbes u (ou v) il existe un cône circonscrit

à la surface, il resterait à exprimer que les courbes u sont planes. Pour le moment je garderai ces surfaces dans toute leur généralité. On a là une généralisation des surfaces de translation. Les surfaces transformées par polaires réciproques ont été étudiées par M. Darboux au Tome I de la *Théorie des Surfaces*. Ce sont les surfaces pour lesquelles il existe deux familles conjuguées formées exclusivement de courbes planes. Ici les surfaces que j'étudie sont caractérisées par ce fait qu'il existe un cône circonscrit le long de toutes les courbes du système conjugué u, v. Appelons Σ_1 ces nouvelles surfaces, nous allons en donner une définition géométrique.

Définition des surfaces Σ_1. — Donnons-nous deux courbes, l'une A décrite par le point M'

$$x' = A_1, \qquad y' = A_2, \qquad z' = A_3,$$

A_1, A_2, A_3 étant des fonctions quelconques de u. L'autre courbe B sera décrite par le point M''

$$x'' = B_1, \qquad y'' = B_2, \qquad z'' = B_3, \qquad \text{fonctions de U.}$$

Donnons-nous encore deux autres fonctions A_4 et B_4 l'une de u l'autre de v et sur la droite M' M'' marquons le point M déterminé par

$$\frac{\overline{MM'}}{\overline{MM''}} = -\frac{A_4}{B_4}.$$

Les coordonnées du point M seront

$$(\Sigma_1) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{A_1 B_4 + A_4 B_1}{A_4 + B_4}, \\[2ex] y = \dfrac{A_2 B_4 + A_4 B_2}{A_4 + B_4}, \\[2ex] z = \dfrac{A_3 B_4 + A_4 B_3}{A_4 + B_4}. \end{cases}$$

Comme on peut écrire

$$x = \frac{\frac{A_1}{A_4} + \frac{B_1}{B_4}}{\frac{1}{A_4} + \frac{1}{B_4}},$$

on voit qu'on a bien les mêmes surfaces que celles définies plus haut.

Les courbes u se correspondent point par point et cette correspondance est établie au moyen des courbes conjuguées v. Dans les surfaces de translation les droites joignant les points correspondants de deux courbes u sont égales, parallèles et de même sens; retenons cette propriété que les droites joignant les points correspondants des courbes u (ou v) forment un cylindre. Comme généralisation je vais démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Dans les surfaces Σ_1 les droites qui joignent les points correspondants de deux courbes u (ou v) quelconques forment un cône.*

Donnons à u deux valeurs fixes et soient a et a_1 les valeurs correspondantes de la fonction A_4. Soient M' et M'_1 les positions fixes correspondantes du point M'; enfin M'' correspond à une valeur de v qu'on fera varier. On a ainsi deux positions de M : M et M_1 déterminées par

$$\frac{MM'}{MM''} = -\frac{a}{B_4}, \qquad \frac{M_1M'_1}{M_1M''} = -\frac{a_1}{B_4}.$$

Or

$$\frac{MM'}{MM''}\,\frac{M_1M''}{M_1M'_1}\,\frac{PM'_1}{PM'} = +1.$$

Donc

$$\frac{PM'}{PM'_1} = \frac{a}{a_1},$$

qui prouve que le point P est fixe.

D'autre part

$$\frac{MM'}{a} = \frac{MM''}{-B_4} = \frac{M''M'}{a+B_4},$$

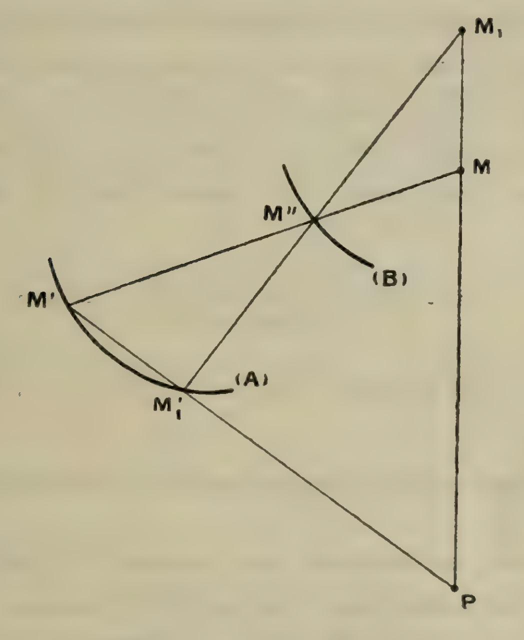
$$\frac{M_1M'_1}{a_1} = \frac{M_1M''}{-B_4} = \frac{M''M'_1}{a_1+B_4},$$

$$\frac{PM}{PM_1}\,\frac{M'_1M_1}{M_1M''}\,\frac{M'M''}{M'M} = +1.$$

Donc

$$\frac{PM}{PM_1} = \frac{a(a_1+B_4)}{a_1(a+B_4)}$$

montre que le rapport $\frac{PM}{PM_1}$ varie avec v et peut être une fonction arbitraire de cette variable.



Corollaire. — Il en résulte facilement que :

1° Trois courbes u sont situées deux à deux sur trois cônes et que les sommets des cônes sont en ligne droite ;

2° Quatre courbes u sont deux à deux sur six cônes et les six sommets forment les six sommets d'un quadrilatère complet.

Surface lieu du sommet des cônes.

Sur la corde $M'M'_1$ la position du point P est définie par l'égalité

$$\frac{PM'}{PM'_1} = \frac{A_4(u)}{A_4(u_1)}$$

si M' et M'_1 correspondent respectivement aux valeurs u et u_1. Cette surface (P) est donc définie d'une façon tout à fait analogue à la surface Σ_1, avec cette différence qu'on se sert d'une seule courbe au lieu de deux et d'une seule fonction A_4. Les courbes u et u_1 tracent sur cette surface (P) un système conjugué symétrique et la courbe $u = u_1$ est le lieu des sommets des cônes circonscrits à Σ_1 le long des courbes u de cette surface. En tous les points de cette courbe $u = u_1$, les courbes u et u_1 sont tangentes. Les équations de la surface (P) sont

$$\text{(P)} \qquad x = \frac{A_1(u)\,A_4(u_1) - A_4(u)\,A_1(u_1)}{A_4(u_1) - A_4(u)};$$

pour y et z on change l'indice 1 en 2 ou 3.

Cas particulier des surfaces de première espèce.

Je reviens maintenant aux surfaces Σ de première espèce, c'est-à-dire pour lesquelles le plan des courbes u passe par une droite fixe Oz, par exemple :

$$x = \frac{A_1 + B_1}{A_4 + B_4}, \qquad y = \frac{A_2 + B_2}{A_4 + B_4}, \qquad z = \frac{A_3 + B_3}{A_4 + B_4}.$$

Mais pour que $\frac{y}{x}$ dépende de u et pas de v, on montre facilement qu'il faut que B_1 et B_2 soient constants et alors on peut les supposer nuls. Un simple changement

de notations conduit alors aux formules

$$x = \frac{A_1 B_4}{A_4 + B_4},$$
$$y = \frac{A_2 B_4}{A_4 + B_4}.$$
$$z = \frac{A_3 B_4 + A_4 B_3}{A_4 + B_4}$$

qui sont les formules (Σ_1) où l'on fait

$$B_1 = 0, \qquad B_2 = 0.$$

Il suffit donc de supposer que la courbe (B) décrite par le point M'' soit une droite pour avoir les nouvelles surfaces. Donc on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Des surfaces Σ de première espèce sont telles que deux courbes planes u se correspondent par homologie. Il en résulte que, si l'une de ces courbes coupe l'axe Oz en un certain nombre de points, les autres courbes u passent par les mêmes points.*

Remarque. — Pour obtenir les surfaces Σ_1 au lieu de poser

$$\frac{MM'}{MM''} = -\frac{A_4}{B_4},$$

on pourrait prendre

$$\frac{MM'}{MM''} = \frac{A_4 + K}{B_4 + K},$$

k étant une constante. Chaque valeur de k donne une surface, on a ainsi des surfaces qui se correspondent point par point avec plans tangents parallèles. On trouve ainsi un cas particulier intéressant du théorème suivant, énoncé par M. Darboux au Tome II de la *Théorie des Surfaces :*

Si l'on mène à deux surfaces S *et* S_1 *des plans tangents parallèles, la droite qui joint les points de contact engendre une congruence dont les développables interceptent sur* S *et* S_1 *un réseau conjugué.*

[$K^1$14f]

SUR UN HEXAÈDRE PARTICULIER;

Par M. R. BRICARD.

1. Il existe dans le plan deux espèces de quadrilatéres ayant leurs côtés opposés égaux deux à deux : le *parallélogramme* et le *contre-parallélogramme* (figure formée par les côtés non parallèles et les diagonales d'un trapèze isoscèle).

Dans l'espace, il existe un hexaèdre, le *parallélépipède*, dont toutes les faces sont des parallélogrammes. On peut rechercher, par analogie, s'il existe un hexaèdre dont toutes les faces sont des contre-parallélogrammes. Nous allons voir que la réponse est affirmative. Donnons, dès maintenant, le nom de *contre-parallélépipède* à l'hexaèdre satisfaisant.

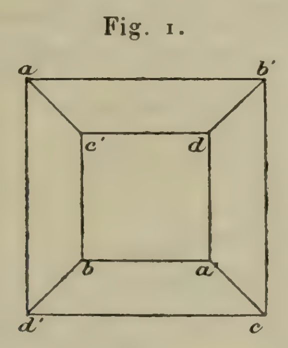
2. Soit $abcda'b'c'd'$ le schéma d'un contre-parallélépipède (*fig.* 1). Les lettres ont été tellement disposées que deux quelconques des sommets a, b, c, d soient les sommets opposés d'une même face de l'hexaèdre; a', b', c', d' sont les sommets de l'hexaèdre respectivement opposés aux premiers.

Par hypothèse, le quadrilatère $a'cb'd$ par exemple est un contre-parallélogramme; ses diagonales $a'b'$ et cd sont donc parallèles. De même, $a'c'$ est parallèle à db, et $a'd'$ est parallèle à bc. Autrement dit, $a'b'$, $a'c'$

et $a'd'$ sont respectivement parallèles aux côtés du triangle bcd; ces trois droites sont donc dans un même plan, d'ailleurs parallèle au plan du triangle. On verra, par un raisonnement semblable, que ce dernier plan contient aussi le point a.

Ainsi, les deux quadrangles $abcd$ et $a'b'c'd'$ appartiennent respectivement à deux plans parallèles P et P'.

Fig. 1.



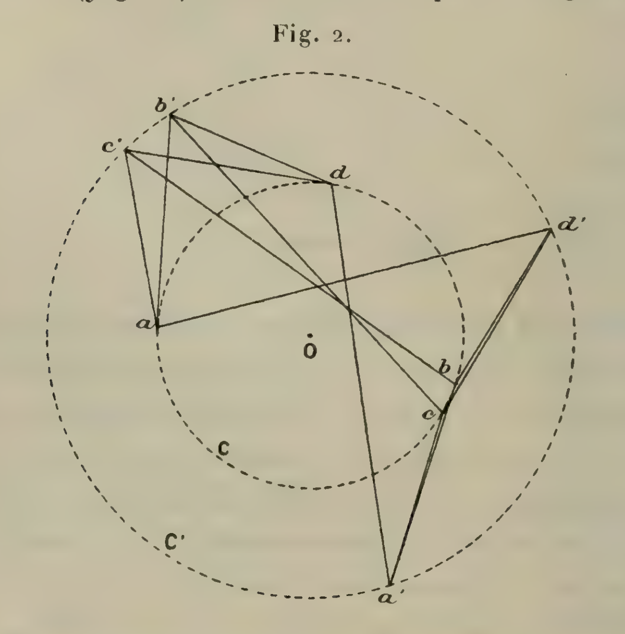
En outre, les côtés du premier quadrangle sont parallèles à ceux du second, deux côtés parallèles étant désignés par des lettres différentes (par exemple ab et $c'd'$). On voit qu'à trois côtés concourants de l'un des quadrangles correspondent dans l'autre trois côtés formant un triangle. On reconnaît là les *quadrangles réciproques* de la statique graphique.

Pour aller plus loin, faisons une projection orthogonale de l'hexaèdre sur le plan P. Le contre-parallélogramme $a'db'c$ restera visiblement tel en projection : il en résulte que les médiatrices des segments $a'b'$ et cd (c'est-à-dire les perpendiculaires élevées aux milieux de ces segments) sont confondues. De même les médiatrices des segments $a'c'$ et db, et celles des segments $a'd'$ et bc. Mais les médiatrices des segments cd, db, bc concourent en un point O, centre du cercle circonscrit au triangle bcd. Il résulte immédiatement de là que les quatre points a', b', c', d' appartiennent à un

cercle ayant le même centre O. On verra aussi que le point a appartient au premier cercle contenant les points b, c, d. En résumé les deux quadrangles $abcd$ et $a'b'c'd'$ sont, en projection sur le plan P, inscrits à deux cercles concentriques.

Il est facile d'achever. Soient α, β, ..., γ', δ' les angles que font les rayons Oa, Ob, ..., Oc', Od' avec un axe quelconque Ox. Pour exprimer que le quadrilatère $a'cb'd$ (*fig.* 2) est un contre-parallélogramme, il

Fig. 2.



suffit évidemment d'écrire que les deux angles $\widehat{a'Ob'}$ et $\widehat{cOd}$ ont les mêmes bissectrices, ce qui donne

$$\alpha' + \beta' = \gamma + \delta.$$

On aura de même

$$\alpha' + \gamma' = \beta + \delta,$$
$$\alpha' + \delta' = \beta + \gamma,$$
$$\beta' + \gamma' = \alpha + \delta,$$
$$\beta' + \delta' = \alpha + \gamma,$$
$$\gamma' + \delta' = \alpha + \beta.$$

On reconnaît tout de suite que ces six équations sont compatibles, *et cela établit définitivement l'existence du contre-parallélépipède.* En résolvant le système par rapport à α', β', γ', δ', il vient

$$\alpha' = \frac{-\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2},$$

$$\beta' = \frac{\alpha-\beta+\gamma+\delta}{2},$$

$$\gamma' = \frac{\alpha+\beta-\gamma+\delta}{2},$$

$$\delta' = \frac{\alpha+\beta+\gamma-\delta}{2}.$$

On peut donc se donner arbitrairement les points a, b, c, d sur le cercle C. Les positions des points a', b', c', d' sur le cercle C′ en résultent. Pratiquement, il vaut mieux se donner trois points sur le cercle C et un point sur le cercle C′, par exemple les points a, b, c et d'. On obtient les autres points en utilisant la réciprocité des deux quadrangles. On aboutit ainsi à la construction suivante :

Tracer deux cercles concentriques C *et* C′ ; *marquer arbitrairement les points* a, b, c *sur le premier et* d' *sur le second. Construire successivement les points* c', a', d *et* b', *appartenant au cercle* C′ *ou au cercle* C *suivant qu'ils sont désignés par des lettres accentuées ou non, en menant* $d'c'$, *parallèle à* ba ; $d'a'$, *parallèle à* bc ; bd, *parallèle à* $a'c'$; $c'b'$, *parallèle à* ad.

Les points a, b, c, d *et ceux qu'on obtient en donnant au quadrangle* $a'b'c'd'$ *une translation quelconque perpendiculaire au plan de la figure sont les sommets d'un contre-parallélépipède.*

3. Le contre-parallélépipède jouit de propriétés qui résultent immédiatement de sa construction. Tout d'abord, il est évident qu'il est inscrit à une sphère. On voit tout aussi facilement que les douze arêtes du polyèdre sont réparties quatre par quatre sur trois hyperboloïdes de révolution autour de l'axe commun des cercles C et C′, savoir :

H_1, contenant les arêtes ab', ba', cd', dc' ;
H_2, contenant les arêtes ac', ca', bd', db' ;
H_3, contenant les arêtes ad', da', bc', cb'.

Il existe d'autres hyperboloïdes attachés au contre-parallélépipède. Considérons en effet les deux systèmes de quatre droites

$$ab,\quad a'b',\quad cd',\quad dc'$$

et

$$ab',\quad ba',\quad cd,\quad c'd';$$

on se rend compte que chaque droite de l'un des sys-

Fig. 3.

tèmes rencontre chaque droite de l'autre système (à distance finie ou infinie). Ces huit droites sont donc à

un hyperboloïde H'_1 où elles se répartissent en deux groupes de génératrices de l'un et de l'autre système, comme le montre le schéma de la figure 3. La configuration des huit sommets forme donc ce que M. Fontené appelle un *octuple gauche complet*.

L'hyperboloïde H'_1 touche les deux plans P et P', puisqu'il les coupe respectivement suivant les génératrices ab et cd, $a'b'$ et $c'd'$. Ces deux plans étant parallèles, le centre de l'hyperboloïde se trouve sur le plan parallèle et équidistant P''.

Il existe deux hyperboloïdes analogues :

$$H'_2, \text{ contenant les droites } \begin{cases} ac, & a'c', & bd', & db', \\ ac', & ca', & bd, & b'd', \end{cases}$$

et

$$H'_3, \text{ contenant les droites } \begin{cases} ad, & a'd', & bc', & cb', \\ ad', & da', & bc, & b'c', \end{cases}$$

Ils ont aussi leur centre sur le plan P''.

Enfin une propriété intéressante du contre-parallélépipède est relative à la possibilité de sa déformation avec conservation des longueurs des arêtes. En effet, le polyèdre le plus général de cette nature dépend de six paramètres de grandeur, à savoir les rayons des cercles C et C', les longueurs des segments ab, ac, ad', et la valeur de la translation finale qui sert à le définir. D'autre part, ses douze arêtes sont égales quatre par quatre, et la connaissance de leurs longueurs se traduit par trois relations seulement entre les six paramètres. On voit donc *qu'il existe une triple infinité de contre-parallélépipèdes ayant des arêtes de longueurs données*.

Il est curieux de constater que le contre-parallélépipède se comporte, au point de la déformabilité, exactement comme le parallélépipède.

[R1a]

CINÉMATIQUE D'AÉROPLANE;

PAR M. LE LIEUTENANT BALLIF.

Soient deux aéroplanes A et B animés de vitesses constantes V_A et V_B qui se combattent par le canon. Admettons que, pour la facilité du tir, ils aient pris comme règle de manœuvre de maintenir constant l'angle de la vitesse de chacun d'eux, avec la droite qui les joint. Quelles courbes vont décrire ces deux mobiles?

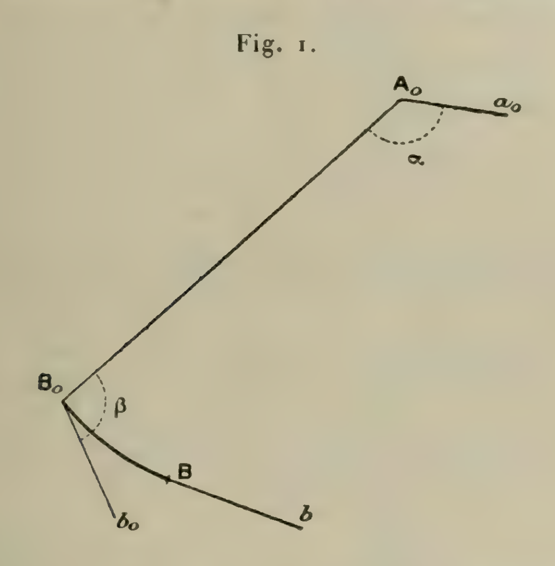
Il est facile de voir que, si l'on n'ajoute aucune condition particulière, l'un des mobiles pourra décrire une courbe arbitraire qui déterminera la trajectoire de l'autre. En effet, supposons les deux mobiles en $A_0 B_0$, avec des vitesses dirigées suivant $A_0 a_0$, $B_0 b_0$, et faisons décrire à B une courbe arbitraire tangente à $B_0 b_0$. Je dis que A peut s'arranger de façon à maintenir des valeurs constantes aux angles $a_0 A_0 B = \alpha$, $t_0 B_0 A = \beta$. En effet, soit B un point infiniment voisin de B_0 sur sa trajectoire, la position correspondante A de A_0 devra se trouver sur un cône de révolution d'angle au sommet β ayant pour axe Bb, tangente à la trajectoire en B. D'autre part, il devra se trouver sur un cône de révolution d'angle au sommet 2α, d'axe AB et de sommet A_0, et sur une sphère de rayon

$$\frac{V_A}{V_B} B_0 B = K . B_0 B.$$

Ces trois surfaces se coupent généralement, de sorte qu'on pourra déterminer A et continuer de proche en proche.

Pour déterminer dans cette hypothèse la trajectoire de A, il semble naturel d'employer la méthode du trièdre mobile qui fournira très simplement les équations du mouvement relatif de A par rapport à B.

Fig. 1.



Prenons pour axes Ox, Oy, Oz la tangente, la normale et la binormale à (B), soient x, y, z les coordonnées de A, et a, b, c les cosinus directeurs de sa vitesse.

Nous aurons la relation

$$y^2 + z^2 = x^2 \operatorname{tang}^2 \beta, \tag{1}$$

qui exprime que la droite AB fait un angle β avec la tangente à (B).

Projetons maintenant la vitesse relative de A sur les trois axes

$$\frac{dx}{dt} = -V_B + aV_A - qz,$$

$$\frac{dy}{dt} = bV_A,$$

$$\frac{dz}{dt} = cV_A + qx,$$

q est la rotation instantanée du trièdre, connue en fonction du temps.

Ces trois équations, résolues par rapport à a, b, c nous donnent

$$a = \left(\frac{dx}{dt} + V_B + qz\right)\frac{1}{V_A},$$

$$b = \frac{dy}{dt} - \frac{1}{V_A},$$

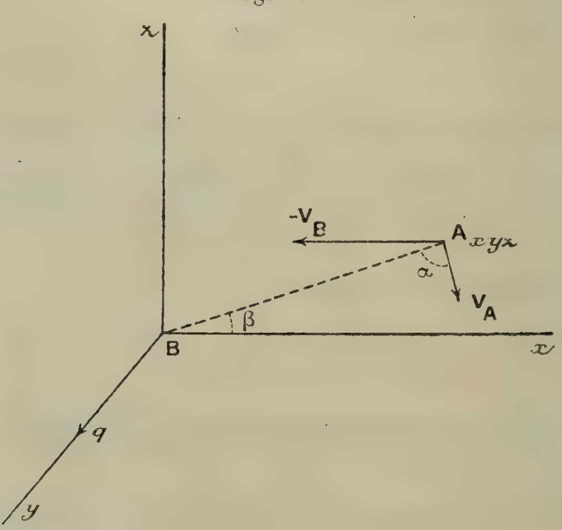
$$c = \left(\frac{dz}{dt} - qx\right)\frac{1}{V_A}.$$

Portons ces valeurs dans les relations

$$\frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos\alpha,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Fig. 2.



Nous obtiendrons les deux équations

$$(2) \qquad \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} + V_B x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = V_A \cos\alpha,$$

$$(3) \qquad \left(\frac{dx}{dt} + V_B + qz\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - qx\right)^2 = V_A^2,$$

qui, avec (1), permettraient, si on les intégrait, de déterminer x, y, z en fonction du temps. Inutile de faire remarquer que ces équations ne se laissent pas intégrer; elles comprennent, en effet, comme cas particulier, le problème général des courbes de poursuite dont on ne connaît pas la solution, même dans le plan. On peut cependant écrire de façon un peu plus simple :

$$(2') \qquad \frac{dr}{dt} + V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha, \qquad (r = AB);$$

cette équation donne r en fonction linéaire de temps, et

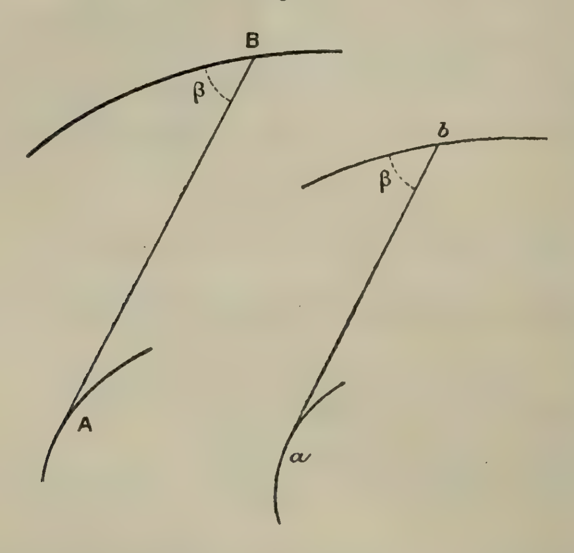
$$(3') \qquad (V_B \sin^2\beta + V_A \cos\alpha \cos\beta + qz)^2 + \left(\frac{d\sqrt{r^2 \sin^2\beta - z^2}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} + qr\cos\beta\right)^2 = V_A^2$$

montre que tout se ramène à intégrer une équation différentielle à une seule variable z, du premier ordre.

Examinons séparément le cas d'un intérêt tout particulier où $\alpha = 0$; dans ce cas, le mobile A se dirige constamment vers B. Dans ce cas, on ne peut plus se donner arbitrairement la courbe (B). En effet, la droite AB étant constamment tangente à (A) décrit une surface développable dont l'arête de rebroussement est (A). Développons cette surface sur un plan, les angles seront conservés et nous aurons, comme transformées de (A) et (B) deux courbes (a) et (b) telles que les tangentes à (a) fassent un angle constant avec (b) et que les arcs correspondants sur les deux courbes soient proportionnels. On sait que cette propriété est caractéristique de la spirale logarithmique. La courbe (A) est donc une spirale logarithmique gauche, c'est-à-dire une courbe ayant même relation

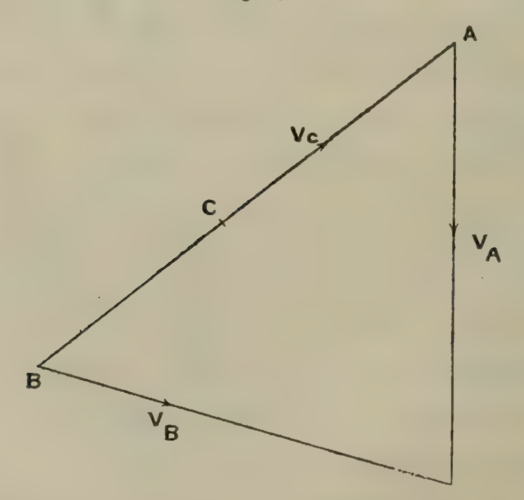
entre l'arc et la courbure que la spirale logarithmique et une torsion arbitraire, et la courbe (B) est une tra-

Fig. 3.



jectoire à angle constant β des génératrices de la développable ayant (A) pour arête de rebroussement. On

Fig. 4.



voit donc que ces courbes dépendent d'une seule fonction arbitraire, qui est la torsion de (A).

On se rend facilement compte que le résultat reste le même si l'on astreint les vitesses V_A et V_B à être dans un même plan. En effet, dans ce cas, les plans tangents à la surface réglée engendrée par AB étant confondus en A et B sont confondus tout le long de cette génératrice; donc, la surface engendrée par AB est développable. Le triangle formé par A, B et leurs vitesses se déplace en restant constamment semblable à lui-même et comme le rapport $\frac{V_B}{V_A}$ est constant, il existe un point C doué d'une vitesse constante dirigée suivant AB, et ce point C divise le segment AB dans un rapport constant. C'est donc ce point C qui décrira l'arête de rebroussement, qui sera la spirale logarithmique gauchie du problème précédent, et A et B décriront des trajectoires à angle constant des génératrices de la développable ayant (C) comme arête de rebroussement.

Je vais maintenant considérer un cas qui semble présenter un certain intérêt : c'est celui où les deux aéroplanes manœuvrent de façon à avoir des altitudes égales à chaque instant; c'est ce qui pourra se présenter, car un aéroplane ne consentira jamais, s'il peut l'empêcher, à se laisser dominer par son ennemi. Soient donc deux mobiles A et B situés dans un plan horizontal et manœuvrant (dans ce plan), de façon que les angles α, β soient constants. C'est le problème bien connu des deux cuirassés qui combattent de façon à se relever réciproquement sous un angle constant, de telle sorte que leurs pièces, une fois pointées, le restent pendant toute la durée du combat. La solution géométrique de ce problème est connue depuis longtemps et j'en ai donné une solution analytique dans la *Revue maritime* d'octobre 1907. On trouve facilement

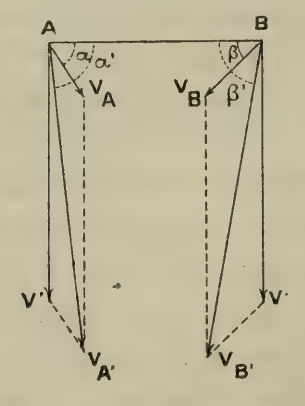
que A et B décrivent deux spirales logarithmiques égales et de même pôle. Donnons maintenant à toute la figure une translation perpendiculaire à son plan et de vitesse constante V'; les nouvelles vitesses

$$\overline{V_{A'}} = \overline{V_A} + \overline{V'} \quad \overline{V_{B'}} = \overline{V_B} + \overline{V'}$$

seront constantes et feront avec AB des angles constants $\alpha' \beta'$. Quant aux trajectoires des points A et B, ce seront deux hélices tracées sur des cylindres à base spirale logarithmique.

On peut remarquer que, dans ce mouvement, l'angle des plans ABV_A et ABV_B est constant, c'est-à-dire que

Fig. 5.



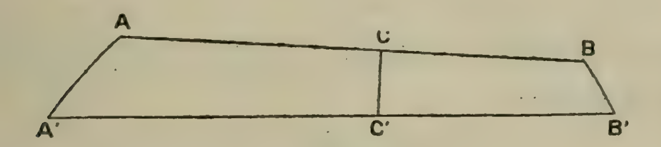
les deux aéroplanes restent dans une position relative complètement fixée au point de vue angulaire.

Ceci nous conduit à nous poser le problème général dont ce dernier est un cas particulier : trouver les trajectoires des deux aéroplanes lorsque leurs vitesses sont assujetties à faire avec la droite qui les joint des angles constants et que, de plus, l'angle dièdre des plans passant par leurs vitesses et la droite qui les joint est constant également.

Pour résoudre ce problème, il suffit de prendre les

positions successives AB, $A'B'$, $A''B''$ de la droite AB dans la question précédente et, au lieu de nous astreindre à rendre AB, $A'B'$, $A''B''$ parallèles à un même plan, il faut au contraire faire tourner chaque quadrilatère ganche $A_n B_n A_{n+1} B_{n+1}$ d'un angle arbitraire autour de $A_n B_n$, ce qui introduit dans la solution une fonction arbitraire.

Mais cette transformation qui revient à faire tourner le trièdre fondamental et la courbe (hélice sur cylindre



à base spirale logarithmique) qui lui est liée, n'est plus simplement une modification de la torsion, car elle influe simultanément sur la courbure et la torsion.

Remarques I. — On peut se demander comment on a été conduit, dans le premier problème, à examiner le cas où l'un des mobiles se dirigeait constamment vers l'autre, et pourquoi ce cas particulier diffère si profondément du cas général. Au point de vue géométrique, c'est parce que le cône de révolution d'angle au sommet 2α qui est une surface dégénère en une droite qui est une ligne. On le voit également au point de vue analytique par ce fait que l'équation

$$\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\cos\alpha$$

devient

$$\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+\beta^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=1$$

ou

$$(ax+by+cz)^2=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2).$$

Mais, d'après l'identité de Lagrange

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (\Sigma\, ax)^2 + \Sigma(ay - bx)^2,$$

d'où

$$(ax + by + cz)^2 = (ax + by + cz)^2 + \Sigma(ay - bx)^2,$$

qui n'est vérifiée que pour

$$ay - bx = bz - cy = cx - ay = 0.$$

de sorte que notre unique équation est remplacée par les deux autres

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$$

CORRESPONDANCE.

M. **A. de Saint Germain**. — *Sur les podaires.* — Dans le numéro de juillet 1912, p. 331, M. Barisien signale une propriété simple des podaires : on sait, dit-il, qu'une courbe fermée (C) a pour propriété d'avoir pour podaires des courbes fermées; or, le lieu du point P dont la podaire par rapport à (C) a une aire donnée est une *ellipse* qui devient un cercle lorsque (C) est une courbe à centre. Il est facile de voir que le lieu est un *cercle* dans le cas général.

Prenons des axes rectangulaires dont l'origine est à l'intérieur de (C), on peut regarder cette courbe comme l'enveloppe d'une droite représentée par une équation de la forme

$$a \cos\theta + y \sin\theta - p = 0;$$

l'aire de la podaire d'un point P (α, β) est visiblement

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta - p)^2 \, d\theta,$$

$$U = \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p^2 \, d\theta - \alpha \int_0^{2\pi} p \cos\theta - \beta \int_0^{2\pi} p \sin\theta \, d\theta.$$

Les trois dernières intégrales ont une valeur indépendante de α et de β : si donc U est constant, le point (α, β) a pour lieu un cercle dont le centre est fixe quelle que soit cette constante. Lorsque (C) a pour centre l'origine, les deux dernières intégrales s'annulent et l'on retrouve une formule donnée par M. Barisien.

BIBLIOGRAPHIE.

Lehrbuch der Algebra, par M. *Heinrich Weber*. — Kleine Ausgabe in einem Bande. 1 vol. in-8 de x-528 p. Chez Vieweg und Sohn, Braunschweig. Prix : 14 marks.

Le grand *Lehrbuch der Algebra*, en deux Parties, de M. H. Weber, est considéré à juste titre comme un Ouvrage fondamental, auquel doivent se reporter toutes les personnes soucieuses de se mettre au courant de l'Algèbre moderne [1]. Les lecteurs qu'effraierait son étendue verront avec plaisir l'édition réduite que l'auteur vient de faire paraître. La condensation des matières y est vraiment digne de remarque. En cinq cents pages, on est conduit des propriétés élémentaires des déterminants aux théories de Galois, aux équations de la division du cercle et à la doctrine des nombres algébriques. L'étude des idéaux, dont la création a permis aux génies de

[1] La première Partie a été traduite en français par M. J. Griess (Gauthier-Villars, 1898).

Kummer et de Dedekind de généraliser les lois de l'Arithmétique élémentaire, est considérée comme une des plus abstraites qui soient en Mathématiques. L'exposition de M. Weber est très claire et aussi simple que le sujet le comporte. Elle contribuera sans doute à vulgariser cette belle théorie.

R. B.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un hémisphère creux est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe qui est fixe; cet axe est vertical, et la concavité de l'hémisphère est tournée du côté de la verticale ascendante. Un point pesant* M *se meut sans frottement sur la surface intérieure de l'hémisphère.*

I. *Établir les équations du mouvement relatif du point* M *par rapport à l'hémisphère, et indiquer les circonstances générales de ce mouvement, les conditions initiales étant quelconques.*

II. *On suppose qu'à l'époque initiale le mobile parte du sommet de l'hémisphère, et l'on demande s'il quittera l'hémisphère.*

III. *Le point* M *étant placé, à l'époque initiale, en un point quelconque de l'hémisphère, peut-on choisir la vitesse initiale relative de manière qu'il décrive un parallèle?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque homogène et pesante est limitée par deux triangles équilatéraux dont l'un est intérieur à l'autre. Les côtés de ces triangles sont parallèles deux à deux. Le côté du triangle extérieur ayant pour longueur a, la distance de deux côtés parallèles quelconques est* $\frac{a}{4\sqrt{3}}$.

On fait osciller cette plaque autour d'un côté du triangle extérieur; ce côté étant placé horizontalement et maintenu fixe. Quelle valeur doit avoir a pour que la durée des petites oscillations du pendule composé obtenu ainsi soit d'une seconde? (Juillet 1911.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *L'extrémité inférieure d'une barre rigide, homogène et pesante, est assujettie à glisser sans frottement sur une verticale fixe, tandis que l'extrémité supérieure de la barre est reliée à un point fixe de la même verticale par un fil sans masse, flexible et inextensible, de même longueur que la barre. A l'époque initiale, la barre fait un angle de* 60° *avec la verticale ascendante et tourne autour de cette verticale avec une vitesse angulaire donnée.*

1° *Établir les équations qui déterminent le mouvement de la barre et la tension du fil, en supposant que le fil reste tendu.*

2° *Vérifier que le fil est tendu au début, et étudier la suite du mouvement en laissant de côté l'étude de la tension.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un flotteur est constitué par un cylindre de révolution dont le rayon est* 2^{cm} *et la hauteur* 6^{cm}, *terminé à sa partie supérieure par un hémisphère de rayon égal à celui du cylindre, et à sa partie inférieure par un segment sphérique dont l'axe coïncide avec celui du cylindre, de hauteur* 1^{cm} *et de rayon* 3^{cm}. *Calculer la densité du flotteur sachant que, lorsqu'il flotte sur l'eau, son axe étant vertical, son centre de gravité se trouve sur la surface libre du liquide.* (Novembre 1911.)

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *A une sphère homogène de densité* $\mathcal{E}$, *de centre* C *et de rayon* R *sont soudées, aux deux extrémités* D *et* E *d'un même diamètre et suivant le prolongement de ce diamètre, deux tiges homogènes de densité* $\mathcal{E}'$, *chacune de longueur égale au rayon de la sphère. Le solide ainsi formé est pesant.*

Les extrémités A *et* B *de ces deux tiges sont assujetties à ne pas quitter deux droites gauches fixes données* d_1 *et* d_2 *formant entre elles un angle de* 60° *et inclinées toutes deux de* 60° *sur l'horizon.*

Le centre C *est repoussé par le milieu* O *de la plus courte distance* $O_1O_2 = \delta$ *des deux droites* d_1 *et* d_2, *proportionnellement à la distance* OC. *On désignera par* μ *le rapport du poids total du solide à la répulsion exercée par* O *à l'unité de distance.*

On donne la position initiale et l'état initial des vitesses du solide envisagé. On demande d'étudier son mouvement.

Pour fixer les idées, on envisagera en particulier le cas où

$$\mathcal{E} = \frac{6}{\pi}, \qquad \mathcal{E}' = 5, \qquad R = \frac{1}{2}, \qquad \delta = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

(Juin 1910.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On imprime au tore d'un gyroscope, dont le centre est fixé relativement à la Terre, une rotation initiale autour de l'axe de ce tore.*

Si ω *est la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe et* n *la vitesse angulaire initiale de rotation du tore autour de son axe, on néglige*

$$\omega^2 \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{n}.$$

L'un des anneaux de suspension du gyroscope est fixé de façon à obliger l'axe du tore à ne pas quitter un plan horizontal fixé à la Terre.

Étudier le mouvement de l'axe du tore dans ce plan horizontal.

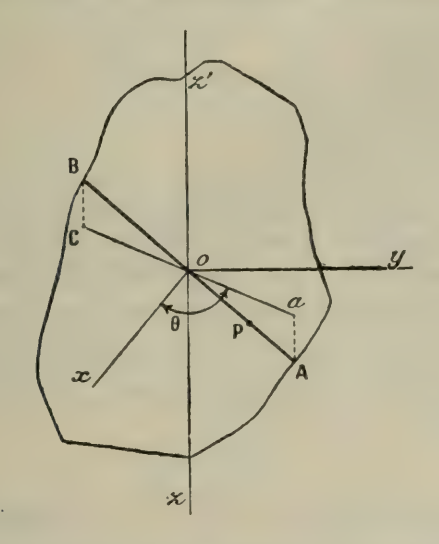
On néglige le frottement. (Octobre 1910.)

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un corps solide de masse* m *peut tourner librement, sans frottement autour d'un axe vertical fixe* Z'OZ; *dans ce corps est creusé un canal rectiligne* AOB, *de section infiniment petite rencontrant l'axe* Z'Z *en* O *et faisant, avec la verticale descendante* OZ, *un angle aigu* ZOA $= \alpha$; *un point matériel pesant* P, *de même masse* m, *peut glisser sans frottement dans ce canal.*

Trouver le mouvement du système, en supposant d'abord les conditions initiales quelconques.

Notations. — *Prenant deux axes rectangulaires horizontaux* Ox *et* Oy, *on appellera* θ *l'angle* xOa *que fait le plan vertical* BbAa *passant par* AOB *avec le plan* ZOx, r *le segment* OP *estimé positivement dans le sens* OA, *et* mK² *le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe* OZ.



Conditions initiales particulières. — *En appelant* r' *et* θ' *les dérivées de* r *et de* θ *par rapport à* t, *on discutera le cas où, à l'instant initial* $t = 0$, θ *et* r' *seraient nuls,* r *ayant une valeur donnée* r_0 *et* θ' *une valeur donnée* ω. *Le segment* r *va-t-il d'abord en augmentant ou en diminuant à partir de* r_0?

Trouver, en particulier, la relation qui doit exister entre r_0 *et* ω *pour que, dans le mouvement,* r *reste constant. Quelle est alors la pression du point* P *sur le corps solide ?*

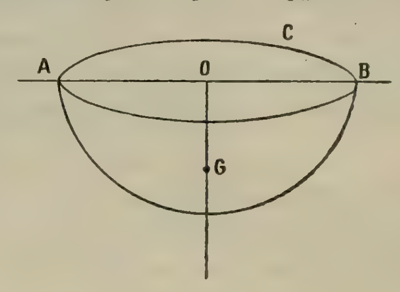
Nota. — *On ne se préoccupera pas de la longueur du canal* AOB.

Épreuve pratique. — *Étant donnée une demi-sphère homogène de rayon* R *et de diamètre* ρ *limitée par le grand cercle* ABC *de centre* O.

1° *Déterminer les axes principaux d'inertie et les moments principaux d'inertie de cette demi-sphère relatifs au point* O ;

2° *Calculer la distance* OG *du centre de gravité* G *de la demi-sphère au point* O ;

3° *Déterminer les axes et les moments principaux d'inertie de la demi-sphère par rapport au point* G ;



4° *On fait de cette demi-sphère un pendule composé, en le suspendant autour d'un diamètre* AOB *de grand cercle de base. Ce diamètre étant horizontal et fixe, calculer la durée* T *de l'oscillation double, infiniment petite (aller et retour) de ce pendule sous l'action de la pesanteur;*

5° *Calculer* T *à* $\frac{1}{100}$ *de seconde près, en supposant (unités C. G. S.)*

$$R = 100,$$
$$g = 980.$$

(Juillet 1911.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2179.

(1911, p. 96.)

Soient E *une ellipse d'axes* $2a$ *et* $2b$ *et ses deux cercles de Chasles* C *et* C′, *concentriques à* E *et de rayons* $(a+b)$ *et* $(a-b)$.

Il existe une infinité de triangles MPQ *qui sont inscrits à* C *et circonscrits à* E *en* M′P′Q′.

Montrer que :

1° *Les normales à* E *en* M′P′Q′ *sont concourantes et que le lieu de leur point de concours est le cercle de Chasles* C′ ;

2° *Le lieu de l'orthocentre du triangle* MPQ *est le même cercle* C′ ;

3° *Les droites* MM', PP', QQ' *sont normales à une ellipse fixe;*

4° *Les droites* PQ *et* P'Q' *ont leur point de concours sur une Kreuzcurve.* E.-N. BARISIEN.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Considérons un cercle C concentrique à une ellipse E de centre O. S'il existe un triangle inscrit à C et circonscrit à E, l'une des asympotes de E coupant C en A et A', les tangentes à E issues de ces points seront parallèles et perpendiculaires, c'est-à-dire isotropes. Il en résulte immédiatement que l'axe radical du cercle C et d'un des foyers F de E sera une corde commune à C et aux asymptotes de E, L'axe radical de C et de F coupe le grand axe de E en α, $O\alpha = \dfrac{R^2+c^2}{2c}$, une corde commune à C et aux asymptotes de E coupe le grand axe en α' et $O\alpha' = \dfrac{Ra}{c}$, on a donc

$$R^2 - 2aR + c^2 = 0$$

ou

$$R = a \pm b.$$

Il y a, par suite, une infinité de triangles circonscrits à une ellipse et inscrits dans l'un de ces cercles de Chasles.

1° et 2°. Étant donné un triangle MPQ, nous allons déterminer les points de contact avec les côtés de ce triangle de la conique inscrite ayant pour centre le centre O du cercle C circonscrit au triangle. Soient p et q les points de C diamétralement opposés à P et Q, pq coupe MP et MQ en P_1 et Q_1, les droites QP_1 et PQ_1 se coupent en I, la droite OI coupe pq en m, contact de pq avec la conique considérée. On a

$$\frac{Q_1M}{Q_1Q}\,\frac{IQ}{IP_1}\,\frac{P_1P}{PM} = 1$$

et, aussi

$$\frac{IQ}{IP_1}\,\frac{mP_1}{mq}\,\frac{Oq}{OQ} = 1;$$

d'où, en remarquant que

$$\frac{Q_1M}{Q_1Q} = \frac{P_1M}{P_1P},$$

$$\frac{P_1M}{PM} = \frac{P_1m}{qm},$$

cette relation montre que les triangles PqP_1 et MP_1m sont semblables; d'où l'on déduit que Mm est perpendiculaire sur pq et finalement que la conique considérée touche les côtés du triangle MPQ en leurs points d'intersection avec les droites isotomiques des hauteurs. Les normales en ces points M', P', Q' sont donc concourantes en un point H' symétrique de l'orthocentre H du triangle par rapport à O.

Le cercle conjugué au triangle MPQ est harmoniquement circonscrit à la conique considérée; si ρ^2 est le carré du rayon de ce cercle, on a donc, en désîgnant par a et b les axes de cette conique, $\overline{OH}^2 = a^2 + b^2 + (\rho^2)$; on a aussi

$$\overline{OH}^2 = (2\rho^2) + R^2.$$

R étant le rayon du cercle MPQ, on a par suite

$$\overline{OH}^2 = 2(a^2 + b^2) - R^2$$

ou, puisque $R = a + b$, $OH = a - b$. Le lieu des points H et H' est donc le cercle de centre O et de rayon $a - b$ lorsque MPQ varie.

3° On sait que si l'on considère un point A d'une ellipse de centre O, le point A' correspondant du cercle principal de cette ellipse, la normale en A et le rayon OA' se coupent sur le cercle de centre O et de rayon $(a+b)$, a et b étant les axes de l'ellipse. Cette propriété permet d'obtenir immédiatement l'équation de la droite MM', l'ellipse E étant rapportée à ses axes. Si, en effet, les coordonnées de M sont $(a+b)\cos\varphi$, $(a+b)\sin\varphi$, celles du point M' seront $-a\cos\varphi$, $-b\sin\varphi$, la droite MM' sera

$$\frac{(a+2b)x}{\cos\varphi} - \frac{(b+2a)y}{\sin\varphi} + c^2 = 0,$$

elle est normale à l'ellipse

$$\frac{9x^2}{(a+2b)^2} + \frac{9y^2}{(b+2a)^2} - 1 = 0.$$

4° Le point de rencontre des droites PQ, $P'Q'$ est le pôle de MM' par rapport à l'ellipse E, il décrit par suite la Kreuzcurve polaire réciproque par rapport à E de la développée de l'ellipse trouvée plus haut.

Remarques. — 1° Les hauteurs du triangle MPQ enveloppent la développée de l'ellipse E.

2° Les points MPQ sont sur une hyperbole d'Apollonius de l'ellipse E, cette hyperbole est l'inverse de la droite OH par rapport au triangle MPQ, ses asymptotes sont les droites de Simson des points d'intersection α et β de OH avec le cercle C par rapport à MPQ. Lorsque MPQ varie, ces droites restent par suite parallèles aux axes de E.

3° Les points M', P', Q' sont les points de contact d'une hypocycloïde à trois rebroussements tritangents à E. On voit que le centre de cette hypocycloïde décrit un cercle de centre O.

Autres solutions par MM. Klug et Lemaire.

2180.

(1911, p. 96.)

Démontrer la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\omega \cos 3\omega \sqrt{\cos 2\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

E.-N. Barisien.

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\omega \cos 3\omega \sqrt{\cos 2\omega}\, d\omega$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\omega}\,(1 - 4\sin^2\omega)\cos^3\omega\, d\omega,$$

posons

$$\sin\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta,$$

l'intégrale devient

$$\frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 2\theta + 4\cos 2\theta + 3)\cos 2\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\left| 2\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta - \frac{1}{3}\sin^3 2\theta + 2\sin 2\theta \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

QUESTIONS.

2200. Soient : ABCD un carré de centre O, M un point quelconque du cercle circonscrit au carré, E le point où la tangente en M au cercle rencontre la diagonale BD. Montrer que les centres des cercles tritangents au triangle OME sont chacun sur un des côtés du carré ABCD.

E.-N. BARISIEN.

2201. Démontrer la relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta\cos^4\theta\,d\theta}{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)^2(a^4\sin^2\theta+b^4\cos^2\theta)^2}$$
$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta\cos^4\theta\,d\theta}{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)(a^6\sin^2\theta+b^6\cos^2\theta)^2}.$$

E.-N. BARISIEN.

2203. Soient AB un diamètre d'un cercle O et M un point de la circonférence. Il existe deux paraboles P et Q passant par A et B et tangentes en M au cercle. Montrer que les axes de ces deux paraboles concourent au milieu I de OM.

E.-N. BARISIEN.

2204. On considère la développable qui est l'enveloppe des quadriques d'un faisceau tangentiel (surface du huitième ordre). Une des quadriques du faisceau, outre qu'elle est inscrite à la développable le long d'une biquadratique, a encore avec elle, comme l'on sait, huit génératrices communes, quatre d'un système, quatre de l'autre. Démontrer que la biquadratique rencontre l'arête de rebroussement de la développable (courbe du douzième ordre) aux points de contact des génératrices en question, et est tangente en ces points à cette courbe. En particulier, chacune des quatre coniques doubles de la développable est tangente à l'arête de rebroussement en quatre de ses seize points de rebroussement. G. FONTENÉ.

[M'5b]

SUR L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

Par M. J. LEMAIRE.

Professeur au Lycée Condorcet.

1. Nous nous proposons d'étudier l'hypocycloïde à trois rebroussements par des procédés élémentaires, en développant seulement les propriétés et démonstrations que nous croyons nouvelles.

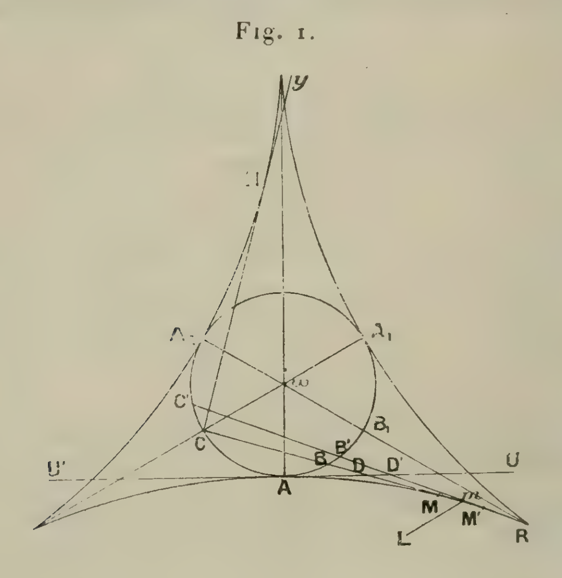
Sur un cercle fixe ω, de rayon r, soit A un point fixe; deux points mobiles B et C, partant de A simultanément, se déplacent sur le cercle d'un mouvement uniforme, le premier dans le sens direct, l'autre dans le sens inverse, la vitesse du second étant double de celle du premier : *l'enveloppe* (H) *de la droite* BC *est une hypocycloïde à trois rebroussements.*

Si m est le point commun à deux positions voisines BC et B'C' de la droite mobile, le triangle B'Cm est isoscèle : la limite de m, quand B'C' vient coïncider avec BC, est donc le point symétrique de C par rapport à B : *la droite* BC *touche son enveloppe au point* M *symétrique de* C *par rapport à* B (*fig.* 1).

Adoptant les unités d'arc et d'angle de la Trigonométrie, nous désignerons par 2φ la mesure de l'arc AB; faisant croître φ de zéro à π, nous obtiendrons (H) par points et tangentes : c'est une courbe fermée tangente au cercle ω en A, A_1, A_2, sommets d'un triangle équilatéral; ωA, ωA_1, ωA_2 sont des axes de symétrie et des tangentes de rebroussement, les points de rebroussement étant à une distance $3r$ de ω. Le point ω, centre

ternaire, sera dit le *centre de la courbe;* le cercle donné, le *cercle inscrit* ou le cercle tritangent à l'hypocycloïde; ces courbes ont leurs convexités opposées.

Fig. 1.



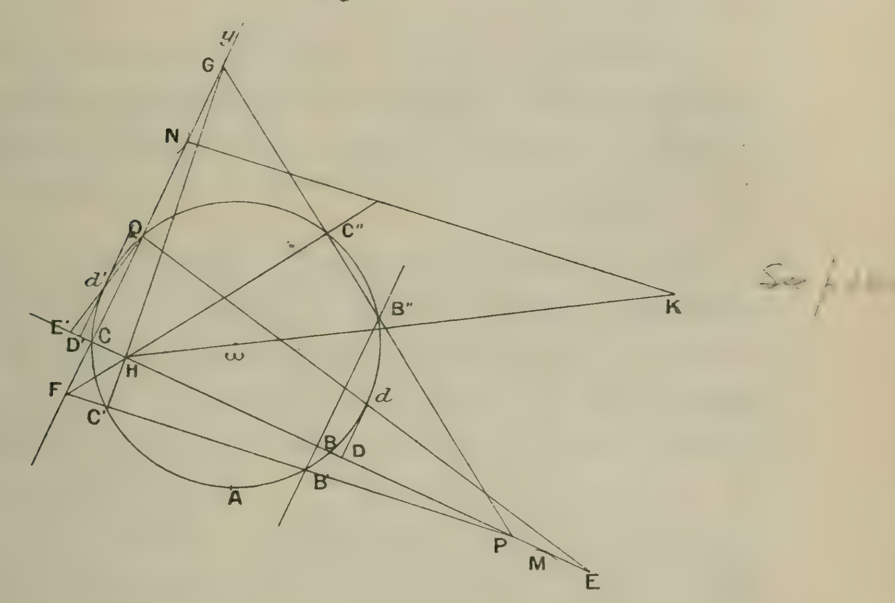
L'hypocycloïde n'a pas de point double ordinaire; la partie du plan qu'elle limite, et qui contient son centre, est dite *région intérieure;* toutes les H_3 (cette notation désignant toute hypocycloïde à trois rebroussements) sont des courbes semblables.

Dans la définition de (H), on peut remplacer la position initiale de la droite mobile, c'est-à-dire la tangente U'U en A au cercle ω, par une autre de ses positions, c'est-à-dire par une corde quelconque.

La courbe est aussi *l'enveloppe des droites sur lesquelles* U'U *et* ωA *déterminent des segments ayant leurs milieux sur le cercle;* dans cette définition, on peut substituer à U'U et ωA deux sécantes rectangulaires BC et CY se coupant sur le cercle; la courbe est tangente à ces sécantes aux points M et N symétriques de C par rapport aux seconds points où elles coupent le cercle.

2. *Classe et degré de* (H). — Il est manifeste que la droite mobile passe successivement, au moins une fois, par tout point du plan; soient BC l'une de ses positions quand elle passe par un point determiné P, CY la perpendiculaire en C à cette droite (*fig* 2); par P

Fig. 2.



passent autant de tangentes à (H) que de droites sur lesquelles CY et BC interceptent un segment ayant son milieu sur le cercle ω : ces droites s'obtiennent en joignant P aux points où la perpendiculaire à CP en son milieu coupe ω; il existe donc, outre PBC, au plus deux autres tangentes PB′C′ et PB″C″, à (H), issues de P. D'ailleurs, toute tangente PBC faisant avec AB et U′U un triangle isoscèle ayant sa base sur U′U, on peut mener une tangente, et une seule, ayant une direction donnée. Par conséquent (H) *est une courbe de troisième classe, bitangente à la droite de l'infini.*

Elle coupe la droite BC aux points pour lesquels les deux tangentes autres que BC coïncident, et en ces

points seulement, c'est-à-dire aux points E et E' symétriques de C par rapport aux traces D et D', sur BC, des tangentes à ω perpendiculaires à BC; si d et d' sont les points où ces tangentes touchent le cercle, les tangentes à (H) en E et E' sont Ed et E'd' ; elles sont rectangulaires et se coupent en Q sur le cercle ω et sur CY.

Nous voyons que, des tangentes issues de Q, deux sont perpendiculaires; comme il n'existe qu'une seule tangente perpendiculaire à une tangente donnée, *le cercle* ω *est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à* (H).

Nous pouvons ainsi énoncer ce théorème : *Toute corde* EE' *tangente à* (H) *est égale à* $4r$; *son milieu est sur le cercle* ω, *à égale distance de son point de contact* M *et du second point* C *où elle coupe le cercle; les tangentes en* E *et* E' *sont rectangulaires, et se coupent en un point* Q *de* ω; QC *est perpendiculaire à* EE', *et touche* (H) *en* N, *symétrique de* C *par rapport à* Q. La droite MN, joignant les points de contact de deux tangentes rectangulaires, est tangente à (H).

Les normales à (H) en M, E et E' se coupent au point symétrique de Q par rapport à B, c'est-à-dire sur le cercle des rebroussements.

Il existe une normale à (H), et une seule, parallèle à une tangente donnée CBM : c'est la normale en N; elle est inversement homothétique de la tangente par rapport à ω, le rapport d'homothétie étant 3. La développée de (H) est donc une H_3 inversement homothétique de (H), par rapport à ω, dans ce même rapport.

Si ωM coupe en ν la normale en N, ν est le centre de courbure en N, et l'on verrait très aisément que le rayon

de courbure $N\nu$ vaut huit fois la distance de ω à la tangente en N; nous trouverons autrement ces résultats.

Toute tangente à (H) coupant la courbe en deux points, *l'hypocycloïde est du quatrième degré*, comme il résulte de la formule de Cayley

$$3m + i = 3n + r,$$

où m désigne le degré, n la classe, i le nombre des tangentes stationnaires, r celui des points de rebroussement.

3. Voici d'autres conséquences de la figure 2 : B' et B'' étant les milieux des deux tangentes $PB'C'$ et $PB''C''$, nous pouvons dire que si trois cordes tangentes passent en un même point P, *chacune d'elles est perpendiculaire à la droite qui joint les milieux des deux autres.*

Le cercle $PB'B''$, symétrique du cercle ω par rapport à $B'B''$, lui est égal; donc *le cercle qui passe aux milieux de deux cordes tangentes et en leur point commun est égal au cercle inscrit dans* (H).

Si P se déplace de manière que l'angle $\widehat{B'PB''}$ de deux tangentes issues de ce point conserve une valeur constante, C symétrique de P par rapport à $B'B''$, restant sur le cercle, $B'B''$ reste constant, d'où ce théorème : *Si un angle de grandeur constante se déplace en s'appuyant par ses deux côtés sur une* H_3, *la droite qui joint les milieux des cordes déterminées par la courbe sur les côtés a une longueur constante, le centre du cercle passant au point commun aux cordes et en leurs milieux décrit un cercle de centre* ω. La distance des points où les côtés de l'angle

sont coupés par les tangentes qui leur sont respectivement perpendiculaires est aussi constante.

Supposons (*fig.* 2) que P se déplace sur la tangente CB, la bissectrice de l'angle $\widehat{B'CB''}$ reste fixe, celle de $\widehat{B'PB''}$, symétrique de la précédente par rapport à B'B'', conserve donc une direction invariable. Ainsi, *les deux tangentes à une* H_3, *issues d'un point mobile d'une tangente fixe, et autres que celle-ci, font des angles dont les bissectrices ont des directions fixes;* ces directions sont celles des tangentes aux points où la tangente fixe coupe la courbe. On en conclut que la somme des angles de ces tangentes variables avec la tangente fixe est constante, puis que la somme des angles de ces trois tangentes avec une droite fixe est constante.

On étend de suite le théorème au cas où le point se déplace arbitrairement, et l'on a cette importante proposition :

La somme des angles que font avec une droite fixe les trois tangentes issues d'un point quelconque est constante.

M. G. Humbert a déduit cette propriété d'un théorème sur les courbes ayant tous leurs foyers à l'infini, et en a tiré d'intéressantes conséquences (*Nouv. Ann.*, 1893).

Si la droite fixe est la tangente U'U au sommet A de l'hypocycloïde, et si nous appelons α, β, γ les angles des trois tangentes issues d'un point quelconque avec la direction U'U, nous trouverons, en considérant une position particulière du point, A par exemple,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2},$$

le signe $\equiv$ voulant dire : égale à $k\pi$ près (k entier).

Sous cette forme, le théorème avait été énoncé par Laguerre (*Nouv. Ann.*, 1870); sa réciproque est vraie.

4. Tout point d'une H_3 et la tangente en ce point sont déterminés par l'angle que fait cette tangente avec la tangente U′U en un sommet; nous pourrons désigner par la notation φ la tangente correspondant à l'angle φ, que nous pourrons supposer compris entre zéro et π.

Nous appellerons tangente *adjointe* à une tangente donnée α la tangente α', différente de α, issue du point de contact de celle-ci; α et α' sont liés par la relation

$$(1) \qquad 2\alpha + \alpha' \equiv \frac{\pi}{2}.$$

Si trois tangentes α, β, γ *ont un point commun* P, *leurs tangentes adjointes* α', β', γ' *ont aussi un point commun* P′; cette propriété, commune à toutes les courbes de troisième classe, peut s'établir comme il suit : par hypothèse, on a

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv \frac{\pi}{2},$$

$$2\alpha + \alpha' \equiv 2\beta + \beta' \equiv 2\gamma + \gamma' \equiv \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\alpha' + \beta' + \gamma' \equiv \frac{\pi}{2};$$

par suite, à cause de la réciproque du théorème de Laguerre, les tangentes α', β', γ' concourent.

Nous verrons plus tard comment P′ se déduit géométriquement de P.

De la relation (1) résulte que la tangente α' adjointe à la tangente α, l'est aussi à la tangente $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ per-

pendiculaire à α; on retrouve que les tangentes aux extrémités d'une corde tangente sont rectangulaires; on retrouverait aussi que la troisième tangente issue du point commun à ces tangentes rectangulaires est perpendiculaire à la corde; mais nous verrons plus loin d'autres applications du théorème de Laguerre.

5. Revenant à la figure 2, nous observons que le cercle ω, passant au pied C d'une hauteur du triangle PFG et aux milieux B' et B'' de deux côtés, est le cercle des neuf points de ce triangle formé par la tangente CY et les deux tangentes autres que BC issues de P; le rayon du cercle O circonscrit à ce triangle égale $2r$; les autres hauteurs FC'' et GC' sont aussi tangentes à l'hypocycloïde (2); soit H leur point commun.

Les points de contact, avec (H), des côtés, étant les symétriques de C, C', C'' par rapport à Q, B' et B'' respectivement, les normales en ces points concourent au point K symétrique de H par rapport au centre O du cercle circonscrit au triangle, c'est-à-dire donné par $\overline{\omega K} = -3\overline{\omega H}$.

Nous étudierons plus loin les triangles circonscrits tels que PFG et nous verrons en particulier que l'hypocycloïde est l'enveloppe des droites de Simson pour chacun d'eux.

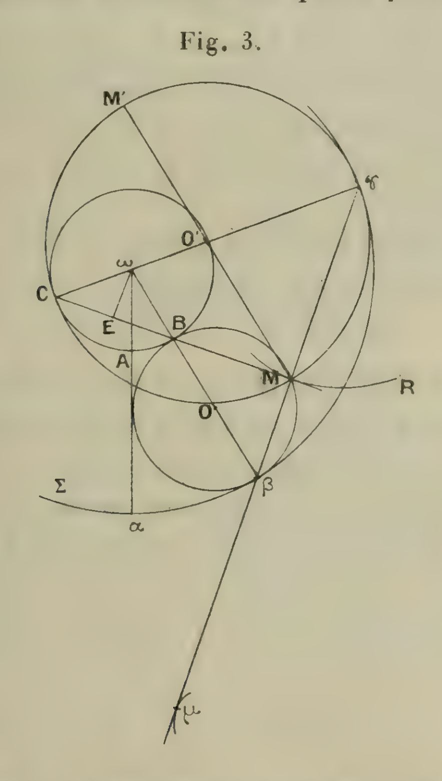
6. *Génération de* (H) *par roulement d'un cercle.* — Traçons le cercle O tangent en B au cercle ω et égal à ce cercle (*fig.* 3), il passe en M; soit Σ le cercle de centre ω, de rayon $3r$, qui touche O en β sur ωBO, et coupe ωA en α; soit, dans le sens direct, R le point de Σ tel que : mesure de $\widehat{\alpha R} = \frac{\pi}{3}$, R est un point de

rebroussement de (H). Nous pouvons supposer $\varphi < \frac{\pi}{6}$, φ désignant la moitié de la mesure de l'arc $\widehat{AB}$, et nous avons

$$\text{mesure de } \widehat{\beta R} = \frac{1}{3} \text{ mesure de } \widehat{\beta M} = \frac{\pi}{3} - 2\varphi.$$

Ces arcs sont donc équivalents, et si le cercle O roule sur le cercle Σ de manière que le point de contact,

Fig. 3.



d'abord en R, se déplace vers α, dans le sens inverse, le point de O primitivement en R décrit l'hypocycloïde (H), de R vers M.

Considérant de même le cercle O' de rayon $2r$ tangent intérieurement en C au cercle ω et touchant Σ en γ, nous verrions que ce cercle passe en M, que les points β, M, γ sont en ligne droite, et que les arcs γM et γR sont équivalents et ont une longueur double de

celle des arcs βM et βR; si le cercle O' roule sur Σ de manière que le point de contact, d'abord en R, se déplace sur Σ dans le sens direct, le point de O' primitivement en R décrit aussi la courbe (H), de R vers M. Le diamètre $MO'M'$ enveloppe cette courbe, et le point M' la décrit.

7. *Développée de* (H). — L'arc $R\gamma$ étant double de l'arc $R\beta$, la droite $\beta\gamma$, normale à (H) en M, enveloppe une H_3 touchant en R le cercle Σ et tritangente à ce cercle; le centre de courbure μ de (H) en M est symétrique de γ par rapport à β; et si ωE est la distance de ω à la tangente CBM en M, la figure 3 donne

$$M\mu = \beta M + \beta\mu = \beta M + \beta\gamma = 4\beta M = 8\omega E,$$
$$\frac{\mu\beta}{\mu\gamma} = \frac{1}{2} = \frac{M\beta}{M\gamma}.$$

Ainsi *le point* M *de* (H) *et le centre de courbure* μ *en ce point sont conjugués par rapport au cercle des rebroussements* Σ; *le rayon de courbure vaut huit fois la distance de* ω *à la tangente en* M; *la développée est une* H_3 *tangente à* Σ *aux points de rebroussement de* (H), *c'est-à-dire inversement homothétique de* (H) *par rapport à* ω, *le rapport d'homothétie étant* 3.

8. *Aire de* (H). — m désignant le point commun aux deux positions infiniment voisines BC et $B'C'$ de la droite mobile qui enveloppe (H), nous pouvons écrire (*fig.* 1), aux infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$\text{aire } m\,BB' = \frac{1}{4}\text{aire } m\,CC' = \frac{1}{3}\text{aire } BB'C'C.$$

Si donc B_1 est le point du cercle ω tel que $\widehat{AB_1} = \frac{\pi}{3}$,

et R le point de rebroussement de (H) correspondant

$$\text{aire } AB_1R = \frac{\pi r^2}{6},$$

d'où il suit que *l'aire de la courbe est double de l'aire du cercle inscrit.*

Longueur de (H). — Soient 2φ et $2(\varphi + \Delta\varphi)$ les mesures des arcs AB et AB', φ pouvant être supposé $< \frac{\pi}{6}$, et $\Delta\varphi > 0$; D, D' les traces de BC et B'C' sur U'U, M et M' les points de contact de ces tangentes (*fig.* 1), m leur point commun; on a sans peine

$$BD < BM < Bm, \qquad \text{et} \qquad B'D' < B'm < B'M',$$

ce qui montre que la convexité de la courbe est bien opposée à celle du cercle, et l'on obtient

$$mM = 4r \sin\Delta\varphi \cos(3\varphi + \Delta\varphi),$$
$$mM' = 4r \sin\Delta\varphi \cos(3\varphi + 2\Delta\varphi),$$

$mM = mM'$ aux infiniment petits du second ordre près, et l'on a avec la même approximation

$$\text{arc } MM' = 2mM = 8r \sin\Delta\varphi \cos(3\varphi + \Delta\varphi),$$

d'où

$$\text{arc } AR = 8r \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3\varphi \, d\varphi = \frac{8r}{3}.$$

La longueur de la courbe (H) *est donc égale à* $16r$.

Autrement : si R' est le centre de courbure en A, comme le rayon de courbure en R est nul, l'arc RR' de la développée équivaut au rayon de courbure en A, c'est-à-dire à $8r$, et l'arc AR de (H), qui vaut le tiers du précédent, a pour longueur $\frac{8r}{3}$.

9. *Parabole osculatrice.* — Une parabole et une H_3 ont six tangentes communes, la droite de l'infini comptant pour deux; la parabole osculatrice en M est la parabole Π pour laquelle les tangentes communes à distance finie coïncident avec la tangente à (H) en M; elle est la limite de la parabole Π′ tangente en M et M′ à mM et mM′ (*fig.* 1); la médiane mL de mMM′ donne la direction des diamètres de Π′; posant

$$\alpha = \mathrm{L}\widehat{m}\mathrm{M}, \qquad \alpha' = \mathrm{L}\widehat{m}\mathrm{M}',$$

nous avons

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} = \frac{m\mathrm{M}}{m\mathrm{M}'},$$

d'où nous déduisons, en tenant compte des expressions de mM, mM′ (8),

$$\frac{\operatorname{tang}\dfrac{\alpha'-\alpha}{2}}{\operatorname{tang}\dfrac{\alpha'+\alpha}{2}} = \operatorname{tang}\left(3\varphi + \frac{3\,\Delta\varphi}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{\Delta\varphi}{2},$$

ou, en remarquant que

$$\frac{\alpha+\alpha'}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha'-\alpha}{2} = \operatorname{tang}\left(3\varphi + \frac{3\,\Delta\varphi}{2}\right),$$

d'où

$$\lim\frac{\alpha'-\alpha}{2} = 3\varphi + k\pi \qquad (k \text{ entier})$$

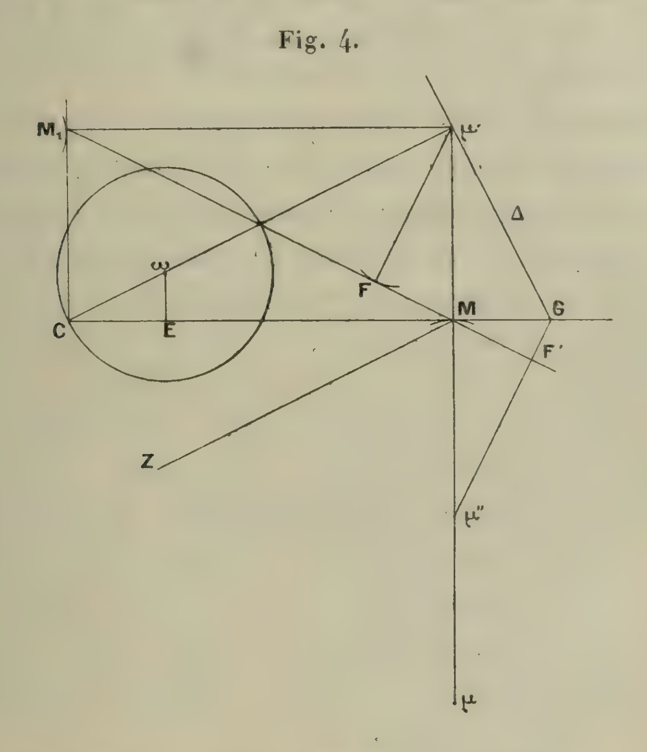
et facilement

$$\lim\alpha = \frac{\pi}{2} - 3\varphi.$$

Nous concluons de là que *le diamètre* MZ *de* Π *est parallèle à* ωC. Construisons la directrice : cette parabole ayant même centre de courbure μ que (H)

au point M, si nous prolongeons μM d'une longueur $M\mu' = \frac{M\mu}{2}$ (*fig.* 4), μ' est sur la directrice de Π.

Fig. 4.



Comme $M\mu' = 4\omega E$, ωE distance de ω à la tangente MBC, μ' est sur $C\omega$; la directrice Δ est la perpendiculaire en ce point à $C\omega$.

Si CM_1 est la tangente à (H) perpendiculaire à CM, la projection F de μ' sur MM_1 est le point où cette droite touche (H); μ' est le point de concours des normales en M, M_1 et F.

La tangente en M à Π coupant la directrice en G, et MM_1 étant symétrique du diamètre MZ par rapport à la tangente, le foyer de Π est la projection F' de G sur MM_1.

$\mu'F$ et GF' sont parallèles à la médiane du triangle rectangle $\mu'MG$ issue de M, donc $MF' = MF$, et l'on a ce théorème énoncé par Laguerre (*Nouv. Ann.*, 1870) :

Si F *est le point où une* H_3 *est touchée par la tangente adjointe à la tangente en* M, *le symétrique* F′ *de* F *par rapport à* M *est le foyer de la parabole qui a en* M *un contact du troisième ordre avec l'hypocycloïde.*

Nous venons de voir aussi que *ce foyer* F′ *est la projection, sur la tangente* MF, *du milieu* μ'' *du rayon de courbure; le symétrique de ce milieu, par rapport à* M, *est sur le cercle des rebroussements* Σ, *et la tangente en ce point à ce cercle est la directrice de la parabole.*

Énonçons aussi ces propriétés faciles à obtenir : *les paraboles osculatrices aux extrémités d'une corde tangente ont même directrice; leur corde commune touche l'hypocycloïde; la distance de leurs foyers est égale à* $8r$; *ces foyers et celui de la parabole osculatrice au point de contact* F *de la corde déterminent un cercle qui passe au deuxième point où l'autre tangente issue de* F *coupe l'hypocycloïde.*

Hypocycloide a trois rebroussements considérée comme enveloppe des droites de Simson d'un triangle.

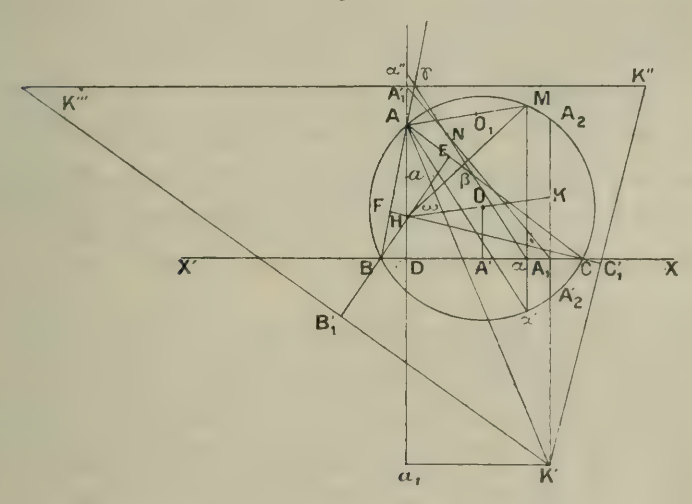
10. Soit M un point du cercle O circonscrit à un triangle ABC; α, β, γ ses projections sur les côtés; Δ la droite qui joint ces points; H l'orthocentre du triangle, A′, B′, C′ les milieux des côtés; D, E, F les pieds des hauteurs; le milieu N de HM est sur Δ; il est aussi le milieu du segment $\alpha\alpha''$ déterminé sur Δ par BC et la hauteur correspondante, et des segments analogues $\beta\beta''$ et $\gamma\gamma''$. Ce point N est sur le cercle des neuf points, dont nous appellerons ω le centre.

Réciproquement, la droite qui passe en N, et qui

coupe BC et AD en des points équidistants de N, étant unique, est $\alpha\alpha''$, c'est-à-dire la droite de Simson relative à M; nous sommes ramenés à un mode de génération de l'hypocycloïde (1) : Δ *enveloppe une* H_3 *tritangente au cercle des neuf points du triangle.*

Cette courbe *touche les côtés et les hauteurs du triangle :* les côtés aux points A_1, B_1, C_1, symétriques des pieds des hauteurs par rapport aux milieux des côtés auxquels ils appartiennent; les hauteurs aux points A'_1, B'_1, C'_1 symétriques des pieds des hauteurs par rapport aux milieux a, b, c de HA, HB, HC (*fig.* 5).

Fig. 5.



$A_1A'_1$, parallèle à $A'a$ et à OA, est tangente à l'hypocycloïde; de même $B_1B'_1$ et $C_1C'_1$.

Les *sommets* de l'hypocycloïde, c'est-à-dire les points où elle touche le cercle des neuf points du triangle, sont les points situés au tiers des arcs A'D, B'E, C'F, à partir des milieux des côtés.

11. *Une* H_3 *quelconque peut d'une infinité de manières être considérée comme l'enveloppe des droites de Simson d'un triangle :* soit en effet une hypocy-

cloïde (H), considérons un triangle quelconque ayant un cercle des neuf points égal au cercle inscrit dans (H); l'enveloppe des droites de Simson de ce triangle est une H_3 égale à (H); si l'on fait coïncider ces deux courbes, le triangle auxiliaire devient un triangle circonscrit à (H), dont cette hypocycloïde est précisément l'enveloppe des droites de Simson. Nous appellerons ces triangles les triangles T de l'hypocycloïde (H) : *leurs cercles circonscrits sont tous égaux, leurs côtés et leurs hauteurs sont tangents à* (H), *ils ont tous pour cercle des neuf points le cercle tritangent à* (H).

Ce mode de génération permettrait de retrouver les propriétés principales de l'hypocycloïde; en particulier, on verrait que la somme des angles que font, avec un côté BC d'un triangle, les deux droites de Simson passant par un point de ce côté, est indépendante de ce point, d'où l'on déduirait le théorème de M. G. Humbert (3).

12. *Une* H_3 *tangente aux côtés et à une hauteur* AD *d'un triangle* ABC *touche les deux autres hauteurs, et le triangle est pour cette courbe un triangle* T : Si BE' est la troisième tangente issue de B, on a, d'après le théorème de M. Humbert, CX étant le prolongement de BC,

$$\widehat{ACX} + \widehat{ABX} + \widehat{ADX} = \widehat{ABC} + \widehat{E'BX},$$

d'où

$$\widehat{E'BX} = \frac{\pi}{2} - C,$$

A, B, C désignant les mesures en radians des angles du triangle. Donc BE' coïncide avec la hauteur BE, et l'hypocycloïde est bien tangente aux deux autres hauteurs du triangle.

L'enveloppe des droites de Simson de ABC a alors même cercle inscrit que cette H_3, car celui de cette courbe passe en D, E, F, sommets d'angles droits circonscrits, mêmes points de contact avec les côtés et avec le cercle inscrit; cette enveloppe coïncide donc avec la courbe donnée, pour laquelle ABC est bien alors un triangle T : ainsi tout triangle circonscrit à une H_3, dont une hauteur touche la courbe, est un triangle T; nous avons déjà rencontré de tels triangles (5).

Il suffit donc, *pour obtenir un triangle* T, de mener d'un point trois tangentes à l'hypocycloïde et d'adjoindre à deux d'entre elles la tangente perpendiculaire à la troisième; il existe trois triangles T : ABC, ABH, ACH, ayant un sommet en A. Si A est intérieur au cercle tritangent, ces trois triangles sont obtusangles : s'il est extérieur, un est acutangle; s'il est sur le cercle, deux des triangles se réduisent à des segments de droite, et le troisième, qui est rectangle, a ses sommets autres que A sur la courbe.

On peut encore observer qu'un triangle T est acutangle, rectangle ou obtusangle, suivant que son orthocentre H est intérieur au cercle circonscrit O, est sur ce cercle ou extérieur, c'est-à-dire suivant que $OH \lesseqgtr 2r$, r désignant le rayon du cercle ω inscrit dans l'hypocycloïde; ou suivant que $O\omega \lesseqgtr r$, c'est-à-dire *suivant que le centre du cercle circonscrit au triangle* T *est intérieur au cercle inscrit dans l'hypocycloïde, est sur ce cercle ou extérieur*.

Du théorème de Laguerre (3) et de ce qui précède il résulte que :

Pour que trois tangentes α, β, γ *forment un triangle* T, *il faut et il suffit que* $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0$ (à $k\pi$ près, k entier).

13. Si un point A se déplace sur une tangente fixe AD, les deux autres tangentes issues de A forment avec la tangente X′DX perpendiculaire à AD (*fig.* 5) un triangle T, dont *le côté* BC *a son milieu* A′ *fixe* sur le cercle ω inscrit dans l'hypocycloïde, puisque ω est le cercle des neuf points de ABC. AO, parallèle à $a\omega$, a une direction fixe; comme $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$, *la bissectrice de l'angle* $\widehat{BAC}$, *quand* A *se déplace sur* AD, *a une direction invariable.*

La considération des triangles T conduit à une foule d'autres propriétés, dont nous donnerons les principales.

14. Tout point H intérieur à une H_3 est l'orthocentre d'un triangle T formé par les tangentes perpendiculaires aux tangentes issues du point, et est intérieur au triangle ayant pour sommets les points de contact des tangentes; on en conclut que tout cercle de rayon $2r$ ayant son centre O à l'intérieur d'une H_3 est circonscrit à un triangle T et un seul.

La figure (5) donne :

$$HA'_1 = AD, \qquad HB'_1 = BE, \qquad HC'_1 = CF,$$
$$HA'_1 . BC = HB'_1 . CA = HC'_1 . AB,$$

d'où

$$HA'_1 \sin \widehat{B'_1 HC'_1} = HB'_1 \sin \widehat{C'_1 HA'_1} = HC'_1 \sin \widehat{A'_1 HB'_1}.$$

Donc, *si d'un point on mène les tangentes à une* H_3, *les produits obtenus en multipliant la distance du point, au point de contact de chaque tangente, par le sinus de l'angle des deux autres tangentes, sont égaux.*

15. *Les normales à une* H_3 *aux points* A_1, B_1, C_1

où elle touche les côtés d'un triangle T *concourent en* K, *point de* HωO *tel que* $\overline{OK} = -\overline{OH}$, *ou* $\overline{\omega K} = -3\overline{\omega H}$; nous établirons plus loin la réciproque.

De même les normales aux points A_1, B'_1, C'_1 où la courbe touche le côté BC, et les hauteurs BE et CF, concourent au point K' de ωA tel que $\overline{\omega K'} = -3\overline{\omega A}$, car HBC est un triangle T ayant A pour orthocentre. K'' et K''' désignant les deux autres points analogues, le triangle K'K''K''' est inversement homothétique, dans le rapport 3, du triangle ABC, par rapport au centre ω de l'hypocycloïde; K est l'orthocentre de ce triangle.

Le centre de gravité G de ABC est sur HO, et l'on a $\overline{\omega H} = -3\overline{\omega G}$, de sorte que H est le centre de gravité de K'K''K'''. On a donc ce théorème :

Si d'un point H *on mène les tangentes à une* H_3, *les normales aux points de contact forment un triangle dont le cercle circonscrit a pour rayon* $6r$; *le centre de gravité de ce triangle est le point* H; *son orthocentre est le point* K *de* Hω *donné par*

$$\overline{\omega K} = -3\overline{\omega H}.$$

16. Traçons le cercle $HB'_1C'_1$ qui coupe HA'_1 en a_1, projection de K' sur HA'_1, et qui passe en K'; H étant le centre de gravité de K'K''K''', on a $\overline{Ha_1} = -2\overline{HA'_1}$; et puisque $K'a_1$ est parallèle à K''K''', le faisceau $(K', a_1 HB'_1 C'_1)$ est harmonique; de là ce théorème énoncé par Laguerre (*Nouv. Ann.*, 1870) : *Si d'un point* H *on mène à une* H_3 *trois tangentes dont les points de contact sont* A'_1, B'_1, C'_1, *et si sur* HA'_1 *on prend* a_1 *tel que* $\overline{Ha_1} = -2\overline{HA'_1}$, *les points* a_1, H, B'_1, C'_1 *appartiennent à un cercle qu'ils divisent harmoniquement.*

Ce théorème, qu'on pouvait déduire de la propriété établie au n° 14, permet de construire une H_3 tangente à deux droites données en deux points donnés. Il montre aussi que *les points de contact des tangentes réelles issues d'un point ne peuvent être en ligne droite.*

Concevons que H soit sur la courbe, deux des points de contact, B'_1 et C'_1 par exemple, coïncident avec H, le cercle $HB'_1C'_1$ devient le cercle décrit sur le rayon de courbure en H comme diamètre; ce cercle intercepte, d'après le théorème ci-dessus, sur HA'_1 la corde Ha_1 telle que $Ha_1 = -2\overline{HA'_1}$; nous retrouvons ainsi que *le cercle de courbure en* H *détermine, sur la deuxième tangente issue de* H, *une corde quadruple de* HA'_1 *et de sens contraire* (9).

17. La figure 5 donne encore

$$\frac{HB'_1}{HC'_1} = \frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin \widehat{BHD}}{\sin \widehat{CHD}};$$

HA'_1 est donc le prolongement de la symédiane de $HB'_1C'_1$ partant de H : *Chaque tangente menée d'un point à une* H_3 *a une direction opposée à celle de la symédiane partant de ce point dans le triangle ayant pour sommets le point donné et les points de contact des deux autres tangentes.*

Prenons maintenant sur HB'_1 et HC'_1 deux points B_2 et C_2 tels que

$$HB'_1 . HB_2 = HC'_1 . HC_2,$$

HA'_1, symédiane pour le triangle $HB'_1C'_1$, est médiane pour HB_2C_2; d'où ce théorème signalé par M. G. Humbert (*Nouv. Ann.*, 1893) : *Si sur les trois tangentes issues de* H *on prend des points* A_2, B_2, C_2,

tels que $HA_2.HA'_1 = HB_2.HB'_1 = HC_2.HC'_1$, *le point* H *est le centre de gravité du triangle* $A_2B_2C_2$.

18. Nous avons déjà vu que les tangentes adjointes de trois tangentes concourantes ont un point commun : les tangentes adjointes des tangentes issues de H, c'est-à-dire $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$ passent donc en un même point P, que nous appellerons le *point adjoint* de H; *tout point* P *est le point adjoint de quatre points* A, B, C, H, *sommets de quatre triangles* T.

$A_1A'_1$, parallèle à OA et à $A'\omega a$, est perpendiculaire à EF, et, A' étant le milieu de DA_1, est symétrique, par rapport à ω, de la hauteur du triangle DEF issue de D; par suite P *est le point symétrique, par rapport à* ω, *de l'orthocentre de* DEF.

Les bissectrices des angles formés par $B_1PB'_1$ et $C_1PC'_1$ étant parallèles aux tangentes en A_1 et A'_1, nous avons cette proposition : *les bissectrices des angles formés par les tangentes issues d'un point* P *sont parallèles aux côtés et aux hauteurs d'un triangle* T *dont les sommets et l'orthocentre ont* P *pour point adjoint*.

19. Si αβγ est la droite de Simson de M (*fig.* 5), le centre O_1 du cercle Aβγ est le milieu de AM et se trouve sur le cercle de diamètre AO; l'orthocentre H_1 de Aβγ est sur la symétrique de AO_1 par rapport à la bissectrice de A, $\frac{AH_1}{AO_1}$ est égal à la valeur absolue de 2 cos A, comme $\frac{AH}{AO}$; AHH_1 et AOO_1 sont inversement semblables, H_1 appartient au cercle de diamètre AH dont le centre *a* est sur le cercle ω; on peut énoncer ce théorème : *Deux tangentes fixes* AB *et* AC *d'une* H_3 *étant coupées par une tangente variable*

en γ *et* β, *le lieu du centre du cercle* A$\beta\gamma$ *est un cercle égal au cercle tritangent et ayant* AO *pour diamètre*, O *étant le centre du cercle circonscrit au triangle* T, ABC, *dont deux côtés appartiennent aux deux premières tangentes. Le lieu de l'orthocentre de* A$\beta\gamma$ *est le cercle de diamètre* AH, H *orthocentre de* ABC; *le centre de ce cercle est sur le cercle tritangent.*

20. Des propriétés des triangles T, on déduit encore aisément que les cercles tangents en A à la tangente AA'_1 et passant respectivement aux points de contact B_1 et C_1 des autres tangentes sont égaux; leur diamètre est égal au segment BC déterminé par AB_1 et AC_1 sur la tangente perpendiculaire à AA'_1.

Elles permettraient de retrouver la construction du centre de courbure en un point et de la parabole osculatrice : considérons en effet un triangle T ayant un angle obtus A, et touchant BC en A_1 et AC en M; le cercle tangent en M à AC, et passant en A_1, a pour limite le cercle osculateur en M quand, la tangente en M restant fixe, le point C vient coïncider avec M; dans les mêmes conditions la parabole touchant AC et BC en M et A_1 devient la parabole qui a en M un contact du troisième ordre avec l'hypocycloïde; cette remarque conduit sans peine aux résultats connus.

Enfin, en exprimant les divers éléments de la figure 5 en fonction de r et des angles α, β, γ que font avec U'U les côtés du triangle ABC, on aurait des formules d'où l'on déduirait diverses conséquences.

Droites de Simson généralisées.

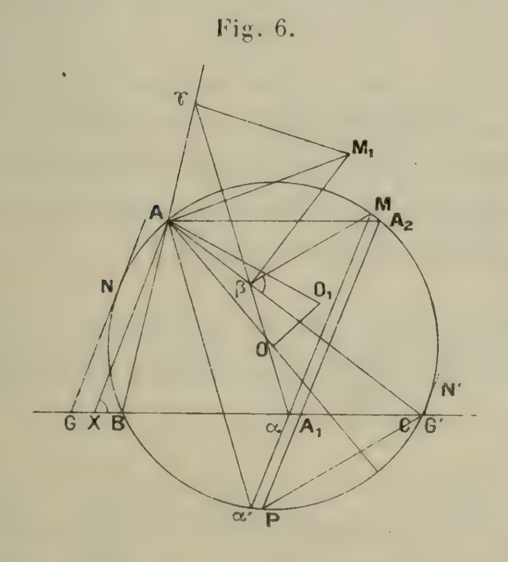
21. Énonçons d'abord les propriétés suivantes analogues à celles des droites de Simson :

I. AX, BY, CZ étant des droites qui font, avec les directions BC, CA, AB des côtés d'un triangle, un même angle θ, compté positivement dans le sens direct à partir des côtés, les projections α, β, γ, sur les côtés, parallèlement à ces droites, d'un point M du cercle circonscrit O appartiennent à une même droite, que nous nommerons la droite $\Delta(\theta)$ du point M; θ est compris entre zéro et π.

II. α', β', γ' étant les seconds points où $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ coupent la circonférence, les droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ sont parallèles à $\Delta(\theta)$; donc, θ étant donné, il existe une droite $\Delta(\theta)$, et une seule, de direction donnée.

III. Les droites relatives à deux points M et M_1 font un angle égal à $\widehat{MAM_1}$; à deux points diamétralement

Fig. 6.



opposés correspondent deux droites rectangulaires, dont le point commun décrit une circonférence.

IV. Par un point α de BC passent deux droites $\Delta(\theta)$, qui coïncident si α vient en G ou G', traces sur BC des

tangentes au cercle O parallèles à AX ; on a

$$GG' = \frac{2R}{\sin\theta},$$

R rayon du cercle (*fig.* 6).

V. $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ font, avec MA, MB, MC respectivement, des angles ayant même bissectrice.

VI. Étant donnés un triangle ABC et une transversale $\alpha\beta\gamma$, il existe un point M du cercle circonscrit, et un seul, pour lequel la droite est une $\Delta(\theta)$: il s'obtient en menant la corde $A\alpha'$ parallèle à la droite, et joignant $\alpha'\alpha$; c'est le foyer de la parabole inscrite au triangle et tangente à la transversale.

22. *Enveloppe des droites* $\Delta(\theta)$. — *Étant donnés un triangle* ABC *et* $\alpha\beta\gamma$ *la droite* $\Delta(\theta)$ *relative à un point* M *du cercle circonscrit* O, *il existe un triangle* AB_1C_1, *ayant ses sommets* B_1 *et* C_1 *sur* AB *et* AC, *pour lequel* $\Delta(\theta)$ *est une droite de Simson ordinaire;* θ *restant constant, ce triangle est invariable quand* M *parcourt le cercle* O, *d'où il suit qu'alors* $\Delta(\theta)$ *enveloppe une* H_3.

Soit M_1 le point qui se projette en β et γ sur AC et AB (*fig.* 6); $A\beta M\gamma$ et $A\beta M_1\gamma$ étant inscriptibles, les points A, M, M_1, β, γ sont sur le cercle de diamètre AM_1

$$\frac{AM}{\sin \widehat{A\beta M}} = AM_1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{AM_1}{AM} = \frac{1}{\sin\theta}.$$

Comme de plus $\widehat{MAM_1} = \widehat{M\beta M_1} = \frac{\pi}{2} - \theta$ (θ est supposé aigu), le lieu de M_1, quand M parcourt le cercle O, est un cercle O_1 obtenu en faisant tourner, dans le sens

direct, d'un angle $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, un cercle homothétique de O, par rapport à A, dans le rapport $\frac{1}{\sin\theta}$; le centre O_1 est sur la perpendiculaire en O au diamètre AOA′ du cercle circonscrit, et l'on a $\widehat{OAO_1} = \frac{\pi}{2} - \theta$, dans le sens direct à partir de AO.

Le cercle O_1 coupe AB et AC en B_1 et C_1 : toute droite $\Delta(\theta)$ relative à ABC, θ conservant la même valeur, est une droite de Simson relative à AB_1C_1, et réciproquement; M parcourant le cercle O, $\Delta(\theta)$ enveloppe donc une H_3 tangente à AB_1, AC_1, B_1C_1, tangente par suite aux trois côtés du triangle primitif ABC, ce qu'on pouvait voir de suite. AX, BY, CZ, qui sont des $\Delta(\theta)$ particulières, sont tangentes à cette H_3, et l'on peut vérifier que B_1C_1 est perpendiculaire à AX. *Le triangle* AB_1C_1 *est un triangle* T *pour l'enveloppe de* $\Delta(\theta)$; ces résultats s'appliquent quand θ est obtus.

Toute H_3 *peut être considérée, inversement, comme l'enveloppe des droites* $\Delta(\theta)$ *relatives à un triangle quelconque qui lui est circonscrit; une tangente arbitraire, autre que les côtés du triangle, détermine* θ.

Il résulte de là que *quatre tangentes déterminent une* H_3.

23. Les troisièmes tangentes issues des sommets de ABC étant AX, BY, CZ, le triangle A′B′C′ qu'elles forment a ses angles égaux à ceux de ABC, d'où ce théorème : *Si des sommets d'un triangle circonscrit à une* H_3 *on mène les autres tangentes, leurs angles avec les côtés opposés ont une même valeur* θ, *et forment un triangle semblable au premier.*

Le rapport de similitude du second triangle A′B′C′ au premier ABC vaut $2\cos\theta$; l'orthocentre du premier est le centre du cercle circonscrit au second; les projections des côtés du premier sur les côtés correspondants du second sont égales à la moitié de ceux-ci.

Ce théorème, qui permettrait de retrouver celui du n° 3, a été établi autrement par M. G. Humbert, qui a appelé A′B′C′ le *triangle dérivé* du premier, et a démontré d'intéressantes propriétés des triangles dérivés successifs d'un triangle donné (*Nouv. Ann.*, 1893).

Nous nommerons *triangle* $T(\theta)$ d'une H_3 tout triangle circonscrit pour lequel cette courbe est l'enveloppe des droites $\Delta(\theta)$: la somme des angles des côtés d'un tel triangle, avec la tangente U′U à la courbe en un de ses sommets, est égale à $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$, à $k\pi$ près; et réciproquement tout triangle circonscrit pour lequel cette somme vaut $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ est un triangle $T(\theta)$.

θ étant donné, un point A intérieur à une H_3 est un sommet de trois triangles $T(\theta)$; les côtés opposés à ce sommet forment un triangle $T(3\theta)$.

24. *Points de contact des côtés de* ABC *avec l'enveloppe de* $\Delta(\theta)$. — La corde CP étant parallèle à BY, et A_1 étant la projection de P sur BC, faite parallèlement à AX, la droite $\Delta(\theta)$ de P est BC qui touche l'enveloppe en A_1; les triangles semblables PA_1C et PAB, PA_1B et PAC, donnent

$$\frac{A_1C}{AB}=\frac{PC}{PA},\qquad \frac{A_1B}{AC}=\frac{PB}{PA},$$

d'où

$$\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{AC}{AB}\,\frac{PB}{PC}=\frac{b\sin(\theta-C)}{c\sin(\theta+B)},$$

a, b, c désignant les côtés du triangle; on s'assure que

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = -\frac{b\sin(\theta - C)}{c\sin(\theta + B)},$$

B_1 et C_1 étant les points de contact de CA et AB, pour que AA_1, BB_1, CC_1 concourent, il faut et il suffit que

$$\frac{\sin(\theta - C)\sin(\theta - A)\sin(\theta - B)}{\sin(\theta + B)\sin(\theta + C)\sin(\theta + A)} = +1$$

ou

$$\frac{(\tang\theta - \tang A)(\tang\theta - \tang B)(\tang\theta - \tang C)}{(\tang\theta + \tang A)(\tang\theta + \tang B)(\tang\theta + \tang C)} = +1,$$

relation vérifiée seulement pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: *pour que* AA_1, BB_1, CC_1 *concourent, il faut et il suffit que* ABC *soit un triangle* T.

Un calcul simple montre que, pour que A_1, B_1, C_1 soient en ligne droite, il faut et il suffit que

$$\tang\theta = \sqrt{-1 - \frac{1}{\cos A \cos B \cos C}},$$

d'où l'on conclut que *les tangentes à une* H_3 *en trois points en ligne droite forment un triangle obtusangle.*

Remarquons que si A_2 est le deuxième point où PA_1 coupe le cercle O, AA_2A_1X est un parallélogramme, d'où la construction immédiate de A_1 si θ est connu, ou de l'angle θ si A_1 est donné.

25. La droite BC coupe l'enveloppe des droites $\Delta(\theta)$ aux points G et G' (21); GG' étant une corde tangente est égale à $4r$, r rayon du cercle tritangent à l'hypocycloïde; par suite : $R = 2r\sin\theta$ est la relation qui lie r, θ et le rayon R du cercle circonscrit à un triangle quelconque $T(\theta)$.

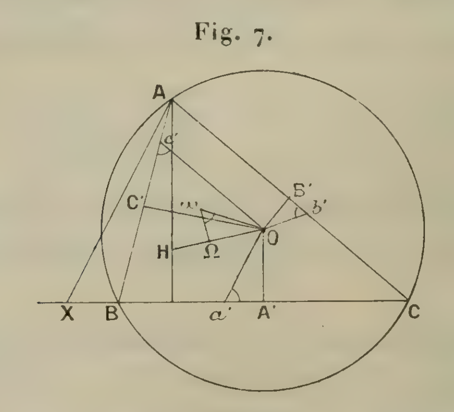
Le milieu a' de GG', projection de O sur BC faite parallèlement à AX, appartient au cercle tritangent ω; de même les points b' et c', projections de O sur CA et AB, faites parallèlement à BY et à CZ.

Le triangle $a'b'c'$, dont les côtés sont perpendiculaires à AX, BY, CZ (3), peut se déduire du triangle $A'B'C'$ ayant ses sommets aux milieux des côtés de ABC, par une homothétie et une rotation $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ dans le sens inverse, opposé au sens de θ; $a'b'c'$ est semblable à $A'B'C'$, dans le rapport

$$\frac{Oa'}{OA'} = \frac{1}{\sin\theta} \qquad (fig.\ 7).$$

Le centre ω *de l'hypocycloïde*, centre du cercle $a'b'c'$, est homologue, dans la transformation ci-dessus,

Fig. 7.



du centre Ω du cercle $A'B'C'$; $\omega\Omega O$ est rectangle en Ω; ωO fait avec $\omega\Omega$, dans le sens direct, l'angle θ, et $\frac{O\omega}{O\Omega} = \frac{1}{\sin\theta}$. Comme Ω est le milieu de OH, on a aussi $\omega O = \omega H$. On peut énoncer le théorème suivant : *Les milieux des cordes d'une* H_3 *qui forment un triangle* $T(\theta)$ *sont les sommets d'un triangle semblable au premier, dans le rapport* $\frac{1}{2\sin\theta}$, *et qui*

a ses côtés perpendiculaires aux côtés du triangle dérivé du premier. Le centre de la courbe est équidistant de l'orthocentre H *du triangle donné et du centre* O *du cercle circonscrit.*

On en conclut que *le lieu des centres des* H_3 *tangentes aux côtés d'un triangle est la perpendiculaire à* OH *en son milieu.*

26. Soit un triangle $T(\theta)$, ABC, le rayon R du cercle circonscrit est égal en valeur absolue à $2r\cos\sigma$, σ désignant la somme des angles de ses côtés avec U′U; si A′B′C′ est le triangle circonscrit $T(\theta')$ dont les côtés sont perpendiculaires à ceux du premier, on a pour ce triangle $\sigma' = \sigma + \frac{\pi}{2}$, le rayon R′ du cercle circonscrit est égal en valeur absolue à $2r\sin\sigma$; par conséquent

$$R^2 + R'^2 = 4r^2.$$

Appelant α, β, γ et α', β', γ' les angles avec U′U des côtés des deux triangles, nous avons

$$\beta' + \gamma' = \beta + \gamma;$$

donc, d'après le théorème de Laguerre (3), les sommets A et A′ sont sur une même tangente : *si deux triangles circonscrits ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, ils ont le même triangle dérivé, et la somme des carrés des rayons des cercles circonscrits est égale à* $4r^2$.

M. Humbert montre que les deux premiers triangles seuls admettent le troisième pour triangle dérivé (*Nouv. Ann.*, 1893); ajoutons qu'ils ont *le même orthocentre* H, centre du cercle circonscrit à leur triangle dérivé commun, et que *les centres* O *et* O′ *de leurs cercles circonscrits sont symétriques par rapport au centre* ω *de l'hypocycloïde;* car $\omega O = \omega O' = \omega H$,

et $\widehat{H\omega O} = 2\theta$, $\widehat{H\omega O'} = \pi - 2\theta$, ces angles étant de sens contraires.

27. Voici d'autres propriétés faciles à déduire de ce qui précède, et que nous nous bornerons à énoncer :

Parmi les triangles $T(\theta)$ d'une H_3, il en est trois, égaux entre eux, qui sont semblables à un triangle donné.

Nous avons vu que tout triangle $T(\theta)$ est inscrit dans un cercle de rayon $R = 2r\sin\theta$; les triangles formés par les troisièmes tangentes issues des sommets d'un triangle $T(\theta)$ d'une part, par les tangentes adjointes de ses côtés d'autre part, sont des triangles $T(\pi - 2\theta)$, par suite inscrits dans des cercles dont les rayons sont égaux à la valeur absolue R' de $2r\sin 2\theta$. Le second de ces triangles est semblable au triangle formé par les tangentes menées au cercle circonscrit au triangle $T(\theta)$ donné, en ses sommets, et ses côtés font avec les tangentes correspondantes un angle égal à θ.

Les normales aux points de contact des côtés du premier triangle donné $T(\theta)$ forment un triangle $T\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ pour la développée de l'hypocycloïde, le rayon R'' du cercle circonscrit à ce triangle est égal en valeur absolue à $6r\cos\theta$.

R, R', R'', r sont liés par les relations

$$9R^2 + R''^2 = 36r^2, \qquad RR'' = 3R'r.$$

Les triangles T sont les triangles circonscrits à une H_3 qui sont inscrits dans les plus grands cercles; pour ces triangles

$$R' = R'' = 0.$$

De toutes les H_3 tangentes aux côtés d'un triangle,

la plus petite, c'est-à-dire celle pour laquelle le cercle inscrit est le plus petit, est l'enveloppe des droites de Simson du triangle. Les autres sont égales deux à deux. les centres de deux H_3 égales sont symétriques par rapport à la droite d'Euler du triangle, et les points où elles touchent un même côté symétriques par rapport au point de contact de ce côté avec l'hypocycloïde minima.

Si deux sommets d'un triangle $T(\theta)$ ont le même point adjoint (18), on a $\theta = \frac{\pi}{2}$ et le triangle est un triangle T.

Le rayon R du cercle circonscrit au triangle $T(\theta)$ formé par trois tangentes α, β, γ ayant la valeur absolue de $2r\sin\theta$, ou $2r\cos(\alpha+\beta+\gamma)$, cette valeur absolue devient celle de $2r\cos 3\alpha$, si $\alpha=\beta=\gamma$; or, il est facile de voir que la limite de ce rayon R est alors le quart du rayon de courbure, et l'on retrouve, pour ce rayon de courbure, l'expression résultant de la construction connue (7).

Des expressions des côtés et des angles d'un triangle $T(\theta)$, et des grandeurs qui s'y rattachent, en fonction de r, α, β, γ, on déduirait d'autres propositions.

28. Conservant les notations habituelles, nous avons

$$\overline{OH}^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C),$$
$$R = 2r\sin\theta;$$

d'où

$$\omega O = \omega H = \frac{OH}{2\sin\theta} = r\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}\,.$$

Donc *les centres des cercles circonscrits et les orthocentres des triangles semblables entre eux, et circonscrits à une* H_3, *sont sur une même circonférence de centre* ω.

Les triangles dérivés successifs de chacun de ces triangles font partie de cet ensemble de triangles semblables; mais en général de deux triangles semblables, l'un n'est pas un des dérivés de l'autre; si en effet σ désigne la somme des angles avec $U'U$ des côtés d'un triangle $T(\theta)$

$$\sigma \equiv \frac{\pi}{2} - \theta.$$

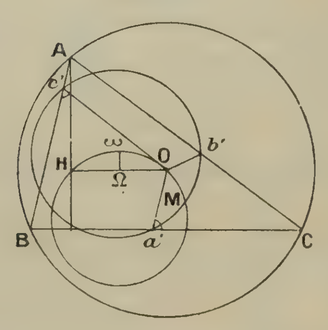
Pour les triangles dérivés successifs, les sommes analogues sont

$$\sigma' \equiv \frac{\pi}{2} + 2\theta, \qquad \sigma'' \equiv \frac{\pi}{2} - 4\theta, \qquad \ldots,$$

de sorte que, pour que de deux triangles semblables $T(\theta)$ et $T(\theta_1)$ le second soit l'un des dérivés du premier, il faut et il suffit que $\theta_1 \equiv (-2)^n\theta$, n entier.

29. *Enveloppe des cercles inscrits dans les* H_3 *tangentes à trois droites.* — Traçons le cercle $O\omega H$ qui coupe en M le cercle $a'b'c'$ inscrit dans l'hypocycloïde

Fig. 8.



de centre ω (25) inscrite au triangle (*fig.* 8); le théorème de Ptolémée donne

$$\omega O(MH + MO) = M\omega \times OH,$$

ou

$$\frac{O\Omega}{\sin\theta}(MH + MO) = \frac{R}{2\sin\theta} \times OH,$$

ou

$$MH + MO = R.$$

Comme $M\omega$ est bissectrice de $\widehat{HMO}$, le cercle $a'b'c'$ touche en M l'ellipse de foyers H et O, et dont l'axe focal égale R, c'est-à-dire *l'ellipse d'Euler du triangle*, qui est ainsi l'enveloppe des cercles ω inscrits dans les H_3 tangentes aux côtés du triangle. Ce théorème a été obtenu autrement, ainsi que l'égalité de ωO et ωH, par M. Bickart (*Revue de Mathématiques spéciales*, 1908).

On en conclut que *les ellipses d'Euler des quatre triangles formés par quatre droites sont bitangentes à un même cercle*, qui a son centre sur leur axe non focal, le cercle inscrit dans l'hypocycloïde tangente aux quatre droites. (*A suivre.*)

[R9a]

NOTE AU SUJET DU FROTTEMENT;

Par M. le Comte de SPARRE.

Le théorème classique pour l'équilibre avec frottement d'un solide reposant par plusieurs points de contact donne, pour cet équilibre, une condition qui, ainsi que je vais le faire voir, est sujette à exceptions.

Je prends l'énoncé de ce théorème dans le Traité de M. Appell [1].

Imaginons un solide S *reposant sur plusieurs solides* $S_1, S_2, \ldots, S_p$ *par des points* $A_1, A_2, \ldots, A_p$,

[1] T. I, 3e édition, 1909, p. 300.

les coefficients de frottement sur $S_1, S_2, \ldots, S_p$ *étant* $f_1, f_2, \ldots, f_p$ *et les angles de frottement* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$; *le solide* S *étant sollicité par des forces données* $F_1, F_2, \ldots, F_n$, *cherchons les conditions d'équilibre. La réaction de* S_ν *sur* S *est une force* R_ν *appliquée au point* A_ν *et faisant avec la normale* N_ν *un angle moindre que l'angle de frottement* φ_ν, *c'est-à-dire située dans le cône* C_ν, *de sommet* A_ν, *d'axe* N_ν *et d'angle* φ_ν. *Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que le système des forces données* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *soit tenu en équilibre par un système de réactions* $R_1, R_2, \ldots, R_p$ *satisfaisant aux conditions précédentes, c'est-à-dire que le système des forces données soit équivalent à un système de forces* $-R_1$, $-R_2, \ldots, -R_p$ *passant respectivement par les points* $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *et situées dans les cônes* $C_1, C_2, \ldots, C_p$. *Ces dernières forces seront toutes détruites par les réactions des surfaces* $S_1, S_2, \ldots, S_p$.

Or, ce théorème peut être en défaut, la condition donnée *comme nécessaire et suffisante pour l'équilibre* est nécessaire, *mais elle n'est pas toujours suffisante.*

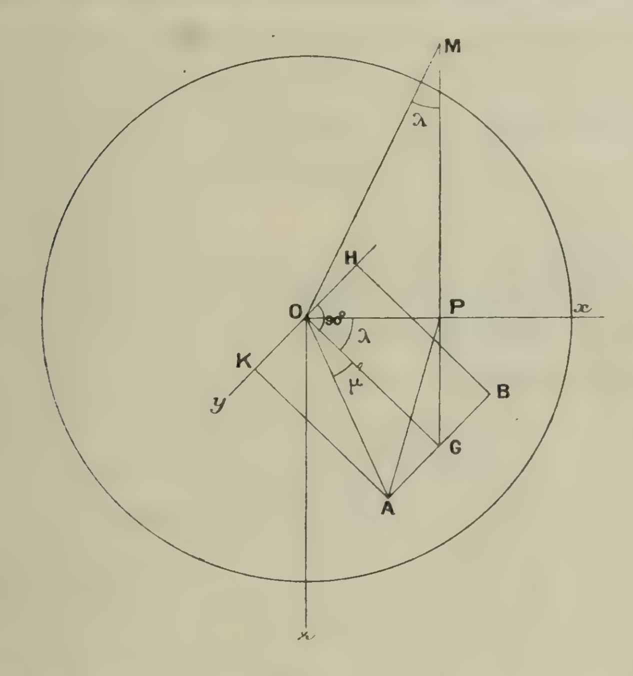
Pour mettre bien le fait en évidence, nous commencerons par donner un exemple où la condition donnée comme nécessaire et suffisante est satisfaite et où le système se met en mouvement.

Supposons une aiguille matérielle pesante AB placée horizontalement à l'intérieur d'une sphère sur laquelle ses extrémités A et B frottent. Le coefficient de frottement des extrémités de l'aiguille sur la sphère étant le même en A et B et égal à

$$f = \tang \varphi.$$

Soit xOz le plan vertical passant par le milieu de

l'aiguille, Ox étant horizontal et Oz vertical et dirigé vers le bas, Oy étant la perpendiculaire au plan xOz, λ l'angle de OG avec Ox, qui est aussi l'angle du



plan AOB passant par l'aiguille et le centre de la sphère avec le plan horizontal xOy.

Nous supposerons que l'aiguille est abandonnée sans vitesse initiale, ou que son mouvement initial est une rotation autour de Oy, tendant à augmenter λ. Comme en vertu de ces hypothèses, tout est symétrique par rapport au plan xOz, l'aiguille se déplacera en restant parallèle à Oy, son mouvement se réduisant à une rotation autour de cette droite. Les extrémités de l'aiguille se déplacent donc sur les petits cercles parallèles au plan xOz passant par les points A et B; par suite, si K et H sont les centres de ces cercles, les forces de frottement Q en A et B, qui sont égales par raison de symétrie, sont perpendiculaires aux droites KA et HB, et elles font avec l'horizon l'angle $\frac{\pi}{2} - \lambda$.

Désignons par R le rayon de la sphère, par r le rayon des petits cercles décrits par A et B, de sorte que, $2a$ étant la longueur de l'aiguille, on a

$$r = \mathrm{KA} = \mathrm{HB} = \mathrm{OG} \qquad \text{et} \qquad a^2 = \mathrm{R}^2 - r^2.$$

Posons de plus

$$\widehat{\mathrm{AOG}} = \mu.$$

Les équations du mouvement du centre de gravité de l'aiguille donnent alors, M désignant la masse et N la valeur commune des composantes normales des réactions en A et B,

$$\mathrm{M}\,r\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \mathrm{M}\,g\cos\lambda - 2\mathrm{Q},$$
$$2\mathrm{N}\cos\mu = \mathrm{M}\,r\frac{d\lambda^2}{dt^2} + \mathrm{M}\,g\sin\lambda.$$

Mais, si le mouvement a lieu, on a

$$\mathrm{Q} = \mathrm{N}f,$$

de sorte qu'on déduit des deux équations précédentes

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{g}{r}\cos\lambda - \frac{f}{\cos\mu}\left(\frac{d\lambda^2}{dt^2} + \frac{g}{r}\sin\lambda\right)$$

ou

$$(1) \qquad \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{g\sin\lambda}{r\cos\mu}(\cot\lambda\cos\mu - f) - \frac{f}{\cos\mu}\,\frac{d\lambda^2}{dt^2}.$$

Cette équation fait voir que si, à l'instant initial,

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0,$$

le mouvement se produira dans les conditions supposées, pourvu du moins que, à l'instant initial,

$$(2) \qquad f < \cot\lambda\cos\mu.$$

L'équilibre est donc impossible si l'inégalité (2) est satisfaite ([1]).

Nous allons maintenant montrer que cette inégalité (2) étant satisfaite *et par suite l'équilibre impossible*, la condition indiquée dans le théorème classique comme nécessaire et suffisante pour l'équilibre, peut l'être également, et que, par suite, cette condition n'est pas suffisante.

La seule force extérieure qui agit sur l'aiguille est son poids appliqué en G. Soit P la projection de G sur l'horizontale Ox, nous pouvons supposer le poids de l'aiguille transporté en un point quelconque E de sa direction et décomposer ce poids en deux forces dirigées suivant EA et EB. L'angle de EA avec la composante normale de la réaction, dirigée suivant le rayon AO, sera minimum si AE est dirigé suivant la projection PA de AO sur le plan vertical PAG, c'est-à-dire si E coïncide avec P. Donc, d'après le théorème classique, la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre serait que l'angle de frottement fût supérieur ou au moins égal à OAP. Désignons cet angle par φ'. Nous aurons

$$\tang^2 \varphi' = \frac{\overline{\mathrm{OP}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}.$$

([1]) On peut d'ailleurs obtenir sans peine une intégrale première de l'équation (1) et l'on trouve

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{2g[3f\cos\mu\cos\lambda + (\cos^2\mu - 2f^2)\sin\lambda]}{r(4f^2+\cos^2\mu)}$$
$$+ \left\{\omega^2 - \frac{2g[3f\cos\mu\cos\lambda_0 + (\cos^2\mu - 2f^2)\sin\lambda_0]}{r(4f^2+\cos^2\mu)}\right\} e^{\frac{2f(\lambda_0-\lambda)}{\cos\mu}}.$$

où λ_0 est la valeur initiale de λ, et ω celle de $\frac{d\lambda}{dt}$.

Mais

$$OP = R \cos\mu \cos\lambda,$$

$$\overline{AP}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GP}^2 = R^2 \sin^2\mu + R^2 \cos^2\mu \sin^2\lambda;$$

d'où

$$\text{tang}^2\varphi' = \frac{\cos^2\mu \cos^2\lambda}{\sin^2\lambda \cos^2\mu + \sin^2\mu} = \frac{\cos^2\mu \cot^2\lambda}{1 + \sin^2\mu \cot^2\lambda};$$

donc

$$\text{tang}\,\varphi' < \cot\lambda \cos\mu.$$

Par suite, si

$$(3) \qquad \text{tang}\,\varphi' < f < \cot\lambda \cos\mu,$$

l'aiguille se mettra en mouvement, bien que la condition donnée dans le théorème classique comme nécessaire et suffisante pour l'équilibre soit satisfaite.

Voici maintenant la raison pour laquelle la condition donnée par le théorème n'est pas toujours suffisante.

Lorsqu'il s'agit d'un point ou d'un corps reposant par un point unique, la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre est bien que les forces auxquelles le corps est soumis se réduisent à une force passant par le point de contact et située à l'intérieur ou sur la surface du cône de résolution ayant ce point pour sommet, la normale pour axe et l'angle de frottement pour demi-angle d'ouverture; mais si le corps repose par un second point, les choses ne se passent plus de même. En effet, si l'on considère isolément l'un des points de contact, la résultante totale des forces qui passent par ce point doit être située à l'intérieur ou sur la surface du cône dont on vient de parler puisqu'elle est égale et directement opposée à la réaction de la surface; toutefois, cette résultante est la résultante non seulement des forces extérieures, mais aussi des forces intérieures de liaison passant par le

point, et la réaction n'est égale et directement opposée à la résultante des forces extérieures passant par le point que si celle des forces intérieures est nulle, ce qui n'aura pas généralement lieu.

On peut, à ce sujet, faire appel à une expérience journalière; chacun sait qu'une ferme, si elle n'a pas de tirant, ne peut se maintenir en équilibre que par le frottement de ses extrémités sur leurs points d'appui, mais s'il y a un tirant à sa base, le frottement disparaît et les murs qui supportent la ferme ne subissent de sa part aucune tendance au renversement.

Revenons au cas de l'aiguille reposant horizontalement à l'intérieur d'une sphère; on peut, sans aucun doute, remplacer, en vertu des liaisons du système, le poids $2p$ de l'aiguille, appliqué en G par deux forces F égales dirigées suivant PA et PB, mais cette substitution donne naissance à deux forces de liaison égales et contraires dirigées suivant AG et BG, de sorte que la résultante totale des forces agissant en A n'est pas dirigée suivant AP [1]. On peut évidemment dire que la force F, si elle agissait seule, serait détruite par la réaction de la surface, du moment que l'angle OAP est au plus égal à l'angle de frottement, mais la réaction de la surface détruirait la force F, si le point A était libre, parce que ce point tendrait à se déplacer suivant le grand cercle intersection de la sphère par le plan OAP et que ce fait donnerait naissance à une force de frottement dirigée suivant la tangente à ce grand cercle; mais la rigidité absolue supposée aux liaisons empêche, du moment que les deux forces dirigées suivant PA et PB sont égales, cette tendance au déplacement de se

---

[1] C'est ce qui se passe dans le cas de la ferme munie d'un tirant.

produire dans le sens indiqué et par suite le frottement correspondant de prendre naissance ([1]).

En nous bornant toujours au cas de l'aiguille placée horizontalement dans une sphère, on peut trouver la condition d'équilibre de la façon suivante :

Supposons l'aiguille en équilibre ; quelles que soient les forces de frottement qui s'exercent en A et B, on peut les décomposer chacune en deux composantes dans les plans tangents à la sphère en ces points, une dans le plan AOB passant par l'aiguille et le centre de la sphère, et l'autre perpendiculaire à ce plan. Soit OM la perpendiculaire au plan AOB menée par O ; s'il y a équilibre, la somme des moments de toutes les forces qui sollicitent l'aiguille par rapport à cette droite sera nulle. Or, les moments du poids de l'aiguille, dirigé suivant la verticale du point G, des composantes normales des réactions en A et B dirigées suivant AO et BO et des composantes du frottement suivant les perpendiculaires en A et B au plan AOB, qui sont parallèles à OM, sont nuls. Quant aux composantes du frottement, situées dans le plan AOB, si celle en A est dirigée en avant du plan MOA et a, par suite, un moment positif, c'est que le point A tend à se déplacer en arrière de ce plan. Il en résulte, en vertu de l'invariabilité de la longueur de l'aiguille, que le point B tend à se déplacer en arrière du plan BOM ; la force de frottement en B sera donc dirigée en avant de ce plan et elle aura, par suite, un moment positif. Les moments des composantes des forces de frottement en A et B dans le plan AOB étant tous deux positifs, leur somme ne peut être nulle. On arriverait à une conclusion toute semblable si le point A tendait à prendre

---

([1]) Tout comme dans le cas de la ferme munie d'un tirant.

un mouvement en avant du plan AOM; les deux moments seraient alors tous deux négatifs. Donc, la somme des moments des forces de frottement par rapport à OM ne peut, par suite de l'invariabilité de la longueur de l'aiguille, être nulle que si les composantes des forces de frottement dans le plan AOB en A et B sont elles-mêmes nulles, et, par suite, les forces de frottement en ces points normales au plan AOB.

Les réactions de la sphère en A et B sont donc situées dans les plans AOM, BOM. Comme d'ailleurs ces deux forces doivent faire équilibre au poids de l'aiguille, si M est le point de rencontre de la verticale du point G avec OM, les réactions en A et B seront dirigées suivant AM et BM.

Donc, s'il y a équilibre, on devra avoir

$$\text{MAO} = \text{MBO} \leqq \varphi.$$

Si d'ailleurs on pose $\text{MAO} = \varphi_1$, nous aurons

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{\text{OM}}{\text{R}}.$$

Mais

$$\text{OM} = r \cot \lambda = \text{R} \cos \mu \cot \lambda.$$

Pour l'équilibre, la condition nécessaire est donc

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \cos \mu \cot \lambda \leqq \operatorname{tang} \varphi$$

ou

$$f \geqq \cos \mu \cot \lambda.$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, l'équilibre a lieu. En effet, on peut alors remplacer la pesanteur par deux forces égales à F, dirigées suivant MA et MB qui, si nous désignons l'angle MAO par φ_1, donneront chacune une composante $\text{F} \cos \varphi_1$ suivant AO et BO et une composante $\text{F} \sin \varphi_1$ suivant les perpendiculaires au plan AOB passant par A et B. Les points A et B tendront donc à se déplacer suivant

ces perpendiculaires et, comme ces deux déplacements sont compatibles avec la liaison résultant de l'invariabilité de la longueur de l'aiguille, la force de liaison qui assure cette invariabilité n'entrera pas en jeu.

Les forces F sont donc les forces totales auxquelles les points A et B, considérés comme libres, sont soumis, et comme ces forces font avec les normales AO et BO à la sphère des angles φ_1, par hypothèse inférieurs ou au plus égaux à φ, ils seront en équilibre. Nous retrouvous la condition déduite de l'étude du mouvement; mais ce qui précède met en évidence que, *si l'on suppose la rigidité absolue des liaisons*, il faut, pour que le théorème classique soit exact, y ajouter la condition que le système de forces soit tel qu'il tende à imprimer aux différents points de contact, considérés comme libres, un système de déplacements compatibles avec les liaisons, car alors les forces de liaisons n'entrent pas en jeu.

On peut dire, il est vrai, que ce qui précède suppose la rigidité absolue des liaisons et que, pour les corps naturels, les choses se passent d'une façon un peu différente ; mais alors les choses dépendent de la façon dont les liaisons sont réalisées, et il faut un examen particulier pour chaque cas.

Je vais, à ce point de vue, reprendre sommairement la question en me bornant toujours au cas de l'aiguille placée horizontalement à l'intérieur d'une sphère.

Si l'aiguille est placée en un point où elle puisse rester en équilibre, cette aiguille se courbera très légèrement sous l'influence de son poids et des réactions de la sphère, les points A et B glisseront eux-mêmes très peu [1] sur la sphère jusqu'à ce qu'ils s'arrêtent sous

---

[1] Si le coefficient de frottement était assez considérable, il

l'influence du poids, de la compression de l'aiguille et du frottement, et, à ce moment, quelle que soit la valeur de λ, la réaction de la sphère fera avec la normale un angle égal à l'angle de frottement, puisque le mouvement des points A et B vient de s'arrêter.

Conservons les notations précédentes; désignons, de plus, par $2p$ le poids de l'aiguille, par ε l'angle que fait la force de frottement avec la normale au plan AOB passant par A et dirigée au-dessus de ce plan, angle compté positivement du côté opposé à AG.

Soient, de plus, N la réaction de la sphère en A, T la force de liaison due à l'aiguille, qui agit au même point, force comptée positivement dans le sens GA, et remplaçons le poids de l'aiguille par deux forces égales à p agissant en A et B.

Écrivons alors les équations d'équilibre du point A ([1]) suivant les trois directions rectangulaires; AO la perpendiculaire à cette droite dans le plan AOB, du côté du point G et la perpendiculaire au plan AOB au-dessus de ce plan.

Nous aurons

$$N - p \sin\lambda \cos\mu - T \sin\mu = 0.$$
$$p \sin\lambda \sin\mu - T \cos\mu - Nf \sin\varepsilon = 0,$$
$$Nf \cos\varepsilon - p \cos\lambda = 0.$$

On tire des deux dernières équations

$$(4) \qquad Nf = \frac{p\cos\lambda}{\cos\varepsilon},$$

$$(5) \qquad T = p \sin\lambda \operatorname{tang}\mu - \frac{p\cos\lambda}{\cos\mu}\operatorname{tang}\varepsilon.$$

---

pourrait y avoir non pas glissement, mais seulement tendance au glissement; nous laissons ce cas de côté, pour le moment.

([1]) Qui s'appliqueront aussi pour le point B puisque, par hypothèse, tout est symétrique par rapport au plan xOz.

et, portant ces valeurs dans la première, on aura

(6) $$\operatorname{tang}\lambda \cos\varepsilon - \sin\mu \sin\varepsilon - \frac{\cos\mu}{f} = 0.$$

Si nous posons alors

(7) $$u = \operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2},$$

nous aurons, pour déterminer u, l'équation

(8) $$\left(\operatorname{tang}\lambda + \frac{\cos\mu}{f}\right)u^2 + 2\sin\mu\, u - \operatorname{tang}\lambda + \frac{\cos\mu}{f} = 0.$$

Mais, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, et où l'aiguille a été posée horizontalement à l'intérieur de la sphère, la valeur de ε, pour être acceptable, doit être positive, car, l'aiguille se courbant légèrement sous l'influence de son poids et de la réaction de la sphère, les points A et B ont dû se rapprocher du plan xOz; or, pour que ε, et par suite u, soit positif, il faut

$$\operatorname{tang}\lambda > \frac{\cos\mu}{f}$$

ou

$$f > \cos\mu \cot\lambda.$$

Nous retrouvons donc la condition déjà obtenue.

Toutefois, supposons maintenant que l'aiguille, au lieu d'être simplement posée horizontalement à l'intérieur de la sphère, subisse en même temps, en étant maintenue horizontale et immobile, une compression verticale en son milieu, qui lui imprime une flexion légère, mais cependant suffisante pour que les points A et B tendent à s'éloigner, et qu'on l'abandonne ensuite à elle-même.

Les points A et B, au lieu de tendre à se rapprocher sous l'influence du poids de l'aiguille et de la réaction de la sphère, tendront, au lieu de cela, par hypothèse,

à s'éloigner, par suite de la réaction élastique de l'aiguille, et, lorsqu'ils s'arrêteront, l'angle ε, au lieu d'avoir, comme dans le cas précédent, une valeur positive, devra avoir une valeur négative. Or, l'équation (8) a toujours, si les racines sont réelles, au moins une racine négative, et la seule condition à remplir par les données sera que les racines de (8) soient réelles, ce qui donne

$$\sin^2\mu - \frac{\cos^2\mu}{f^2} + \tan g^2\lambda > 0$$

ou

$$f > \frac{\cos\mu}{\sqrt{\tan g^2\lambda + \sin^2\mu}}. \tag{9}$$

On retrouve donc, dans ce cas, la condition d'équilibre déduite du théorème classique ; on doit remarquer toutefois que, si l'inégalité (3) est satisfaite, l'équilibre réalisé comme nous venons de le dire sera un équilibre instable, et si l'aiguille reçoit, en son milieu G, une impulsion, si faible soit-elle, perpendiculaire au plan AOB, et dirigée vers le bas, elle se mettra en mouvement, car, l'inégalité (2) étant satisfaite, on retombe sur le cas du mouvement de l'aiguille.

Il y a donc, lorsque l'inégalité (3) est satisfaite, deux solutions également acceptables [1], entre lesquelles on doit choisir suivant la façon dont les conditions initiales sont réalisées. On se trouve en présence d'un fait de coincement analogue à celui que j'ai eu occasion de signaler dans le *Bulletin de la Société mathématique* [2].

---

[1] D'une part le mouvement, si l'aiguille est simplement posée, et, d'autre part, l'équilibre instable, si on la coince par une flexion préalable.

[2] Tome XXXIV, 1906 : *Note au sujet de certaines discontinuités apparentes dans les mouvements où intervient le frottement.*

Nous avons laissé de côté le cas où le frottement est assez grand pour empêcher tout glissement des points A et B. Si, dans ce cas, on voulait calculer les réactions de la sphère, on aurait une première équation, facile à écrire, qui donnerait la tension de l'aiguille assurant l'invariabilité de la distance AB, de sorte que T serait connu en fonction de la longueur, du poids et du coefficient d'élasticité de l'aiguille. Les équations (4), (5) et (6) subsisteraient d'ailleurs sans changement, sauf qu'il faudrait y remplacer f par f' avec la condition

$$f' \leqq f; \tag{10}$$

alors, T étant connu, (5) donnerait ε; (6), f', qui devrait vérifier l'inégalité (10), et (4), N.

Il semble toutefois que l'hypothèse de la rigidité absolue des liaisons est celle qu'il convient d'adopter, du moins *a priori*, et, si on le fait, il faut, pour que le théorème classique soit exact, y introduire la restriction que nous avons indiquée.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un losange articulé peut tourner librement autour d'un de ses côtés* AB *supposé vertical et fixe; les points* A *et* B *sont donc immobiles, les côtés mobiles* AD, DC, CB *sont des tiges rigides, homogènes et pesantes de section infiniment petite ayant même masse* m *et ayant pour longueur commune* a. *Les liaisons sont réalisées sans frottement. Trouver le mouvement du système.*

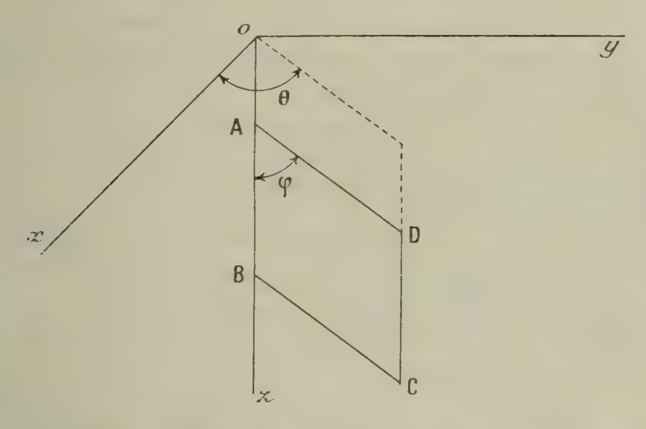
NOTATION. — *En prenant pour axe* Oz *la verticale* AB *orientée positivement vers le bas, on appellera* θ *l'angle*

du plan du losange ABCD *avec le plan* xOz *et* φ *l'angle de* AD *avec* Oz.

On étudiera en particulier le mouvement dans les conditions initiales suivantes : à l'instant $t = 0$, *on a*

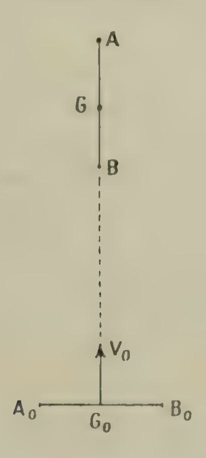
$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 0, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

ω *étant une constante positive.*



On cherchera quelle valeur doit avoir ω *pour que, dans le mouvement,* φ *oscille entre les deux angles extrêmes* $\frac{\pi}{2}$ *et* $\frac{\pi}{3}$.

Épreuve pratique. — *Une barre rectiligne homogène*



pesante A_0B_0, *de section droite infiniment petite, a une*

masse $m = 10^g$ *et une longueur* $l = 100^{cm}$ *à l'instant* $t = 0$, *elle est placée dans une position horizontale* A_0B_0 *et lancée de telle façon que son centre de gravité* G_0 *possède une vitesse initiale verticale ascendante* V_0 *et que la barre tourne dans le plan* $A_0V_0B_0$ *avec une vitesse angulaire* ω_0.

1° *La résistance de l'air étant négligée, calculer* V_0 *et* ω_0 *en unités C. G. S., de telle façon que le point le plus élevé* G *atteint par le centre de gravité soit à* 8^m *au-dessus du point* G_0, *et que, au moment où le centre de gravité est en* G, *la barre occupe une position verticale* AB *après avoir tourné d'un angle droit.*

2° *Calculer la force vive totale de la barre :*

α. *dans sa position initiale* A_0B_0;
β. *dans sa position* AB.

Calculer le travail du poids de la barre quand celle-ci passe de la première position à la seconde.

3° *Dans la position* AB, *on fixe brusquement l'extrémité* A, *de telle façon que la barre ne puisse plus que tourner autour de* A; *calculer la vitesse angulaire* ω_1 *que prend la barre immédiatement après que le point* A *a été ainsi fixé.* (Octobre 1911.)

QUESTION.

2202. Soient A, B, C, D quatre sommets d'un parallélépipède, tels que deux quelconques d'entre eux soient les sommets opposés d'une même face du polyèdre. Soient G_a un cône du second ordre inscrit dans le trièdre formé par les trois faces qui aboutissent en A; G_b, G_c et G_d, les cônes parallèles à G_a ayant leurs sommets respectifs en B, C, D.

Démontrer que les quatre cônes passent par un même point. THIÉ.

[D4a]

SUR LA CROISSANCE DES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE NUL;

PAR M. G. VALIRON.

Dans un article qui vient de paraître dans les *Rendiconti di Palermo* ([1]), M. Mattson revient sur le théorème de M. Wiman et, après avoir démontré la proposition que j'ai donnée moi-même dans un article précédent ([2]), précise le théorème de la façon suivante :

Si la série

(1) $$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\log |a_n|}$$

converge, on a, dans une infinité de couronnes, l'égalité

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)=\frac{z^m}{a_1 a_2 \ldots a_m}(1+\varepsilon),$$

où m est défini par la condition

$$|a_m| < |z| < |a_{m+1}|.$$

En réalité la méthode de M. Mattson suppose que la convergence de la série (1) a été reconnue par la com-

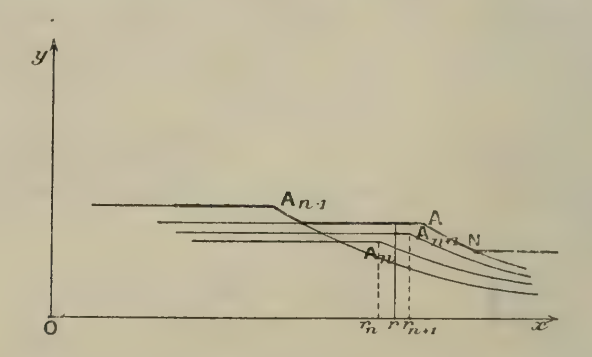
([1]) Ruben MATTSON, *Sur les fonctions entières d'ordre zéro* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1912, 1er semestre).
([2]) *Sur les fonctions entières d'ordre nul* (*Nouvelles Annales*, 1911, § 5).

paraison avec les séries de Bertrand. Je me propose ici de démontrer la proposition en introduisant l'*exposant net minimum* de la suite des zéros, on verra que le théorème est encore vrai dans certains cas où la série (1) est divergente.

1. Il sera nécessaire d'expliquer brièvement la formation de la fonction que j'appelle *exposant net minimum*. Considérons la suite des zéros d'une fonction entière d'ordre nul, soient a_n le $n^{\text{ième}}$ zéro et r_n son module, la quantité

$$\sigma_n = \frac{\log n}{\log r_n}$$

tend vers zéro, lorsque n croît indéfiniment, et la suite des nombres $\sigma_n \log r_n$ est monotone, croissante et illimitée. Marquons dans un plan xOy, les points A_n dont



les coordonnées sont r_n et σ_n, et à chaque point A_n associons la courbe dont l'équation est

$$y_n(x) = \sigma_n, \qquad \text{pour} \qquad x \leqq r_n;$$

$$y_n(x) = \frac{\log n}{\log x}, \qquad \text{pour} \qquad x \geqq r_n;$$

cette courbe est constituée, à gauche du point A_n, par la parallèle à Ox passant par ce point; et à droite par une branche de courbe C_n partant de ce point, décrois-

sante et asymptote à Ox. On voit que la fonction

$$y_n(x)\log x$$

est croissante à gauche de la valeur r_n, constante à droite; et que la courbe C_{n+1} est entièrement située au-dessus de la courbe C_n. Ceci posé si r est une valeur de x, comprise entre r_m et r_{m+1}, on voit facilement que, parmi les nombres $y_i(r)$,

$$(i = n_0,\ n_0+1,\ \ldots\ m,\ m+1,\ \ldots),$$

il y en a un $y_N(r)$, supérieur à tous les autres (ou égal à ceux d'indice moindre). La fonction $R(x)$ qui, pour chaque valeur r de x, est égale à ce nombre $y_N(r)$, est l'*exposant net minimum*. La courbe représentant cette fonction est formée d'une suite d'arcs des courbes $y_n(x)$, passant par une série de points A_{N_1}, A_{N_2}, ..., A_{N_q}, ..., les indices de ces points sont les *indices principaux*. De cette définition résultent les propriétés suivantes :

1° La fonction $R(x)$ est décroissante et constante alternativement;

2° La fonction $R(x)\log x$ croît et est constante alternativement;

3° Les nombres $R(r_n)$ sont supérieurs aux nombres σ_n pour toute valeur de n (supérieure à n_0), et égaux à σ_n pour les indices principaux;

4° La fonction $R(x)$ est la plus petite des fonctions jouissant des trois propriétés précédentes.

Il résulte également des propriétés de la fonction $R(x)$ que la fonction

$$R(x)\,x^{R(x)}$$

varie de la façon suivante : lorsque x croît de r_{N_q} à $r_{N_{q+1}}$, la fonction considérée décroît d'abord, puis croît.

2. *Hypothèse sur la croissance de r_n.* — L'hypothèse que nous ferons sur la croissance de r_n, et qui est nécessitée par la méthode de calcul est la suivante : $R(x)$ *étant l'exposant net minimum, on a*

$$\lim_{x=\infty} R(x)\, x^{R(x)} = 0. \tag{2}$$

Cette condition est vérifiée notamment dans le cas suivant : il existe une fonction (fonction type) $\theta(x)$ décroissante (ou non croissante), telle que la fonction $\theta(x)\log x$ croît, telle que

$$n \leqq r_r^{\theta(r_n)}, \qquad n > n_0,$$

et qui vérifie la condition (2). En effet, la fonction $R(x)$ sera alors inférieure ou égale à $\theta(x)$ pour chaque valeur de x, et vérifiera *a fortiori* la condition (2). En particulier, on voit que si la convergence de la série (1) est constatée par les critères de Bertrand, il existe une fonction $\theta(x)$ satisfaisant aux conditions (2), les conclusions que nous obtiendrons seront donc aussi générales que celles de M. Mattson. Mais on voit aussi que la condition (2) est vérifiée, par exemple, dans le cas où l'on a

$$\frac{1}{\log r_n} = \frac{1}{n \log n \log_2 n}$$

et dans ce cas la série (2) diverge; la condition de M. Mattson est donc trop restrictive.

Examinons maintenant les conséquences de l'inégalité (2); d'après le mode de croissance de la fonction

$$U(x) = R(x)\, x^{R(x)},$$

il existe une infinité d'indices principaux successifs N_q, N_{q+1}, tels que

$$U(r_{N_{q+1}}) < U(r_{N_q}),$$

sans quoi la condition (2) ne serait pas vérifiée : on aura alors dans tout l'intervalle r_{N_q}, $r_{N_{q+1}}$,

$$U(x) < U(r_{N_q}),$$

et en particulier

(3) $$U(r_{N_q} + 1) < U(r_{N_q}),$$

je désignerai par M un indice principal jouissant de la propriété indiquée par cette inégalité, il y a une infinité de tels indices. Nous aurons donc

(4) $$R(r_{M+1})\, r_{M+1}^{R(r_{M+1})} < R(r_M)\, r_M^{R(r_M)} ;$$

d'autre part, puisque M est un indice principal, on a

(5) $$R(r_M) = \frac{\log M}{\log r_M},$$

et aussi

(6) $$R(r_{M+1}) \geqq \frac{\log(M+1)}{\log r_{M+1}}.$$

En utilisant l'égalité (5) et l'inégalité (6), l'inégalité (4) devient

$$R(r_{M+1}) < \frac{M}{M+1} R(r_M);$$

or l'inégalité (6) s'écrit également

$$r_{M+1} \geqq (M+1)^{\frac{1}{R(r_{M+1})}},$$

ce qui donne, en remplaçant $\frac{1}{R(r_{M+1})}$ par la quantité $\frac{M+1}{M}\,\frac{1}{R(r_M)}$ qui lui est inférieure,

$$r_{M+1} \geqq (M+1)^{\frac{M+1}{M}\frac{1}{R(r_M)}} = r_M^{1+\frac{1}{M}}\left(1+\frac{1}{M}\right)^{\frac{M+1}{M}\frac{1}{R(r_M)}} > r_M^{1+\frac{1}{M}},$$

c'est-à-dire

$$(7) \qquad \frac{r_{M+1}}{r_M} > r_M^{\frac{1}{M}} = M^{\frac{1}{MR(r_M)}},$$

Or pour $x = r_M$ l'hypothèse (2) nous donne

$$\lim_{M=\infty} MR(r_M) = 0,$$

et par suite nous obtenons l'inégalité

$$(8) \qquad \frac{r_{M+1}}{r_M} > M^K \qquad \left(K = \frac{1}{MR(r_M)}\right),$$

valable, quelque grand que soit le nombre positif K, *pour une infinité d'indices principaux* M.

3. *Démonstration du théorème.* — La démonstration du théorème signalé au début résulte presque immédiatement de l'inégalité (8). Considérons une valeur $K_1 > 2$, et prenons

$$|z| = r = r_M M^{\frac{K_1}{2}},$$

d'où il résulte

$$\frac{r}{r_{M+1}} < \frac{1}{M^{\frac{K_1}{2}}};$$

nous avons, pour $|z| = r$,

$$(9) \quad f(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$
$$= \frac{r^M}{a_1 a_2 \ldots a_M} \prod_1^M \left(1 - \frac{a_n}{z}\right) \prod_{M+1}^\infty \left(1 - \frac{z}{a_{n'}}\right).$$

Dans les deux produits qui figurent dans cette égalité, les valeurs absolues de $\frac{a_n}{z}$ et $\frac{z}{a_{n'}}$ sont inférieures

à $\frac{1}{2}$; par suite nous avons

$$\frac{1}{\left(1+\frac{r_M}{r}\right)^2} < 1 - \frac{r_M}{r} < \left|1 - \frac{a_n}{z}\right| < 1 + \frac{r_M}{r};$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{r_{n'}}\right)^2} < 1 - \frac{r}{r_{n'}} < \left|1 - \frac{z}{a_{n'}}\right| < 1 + \frac{r}{r_n};$$

d'où nous déduisons

$$(10)\qquad \left|\prod_1^M \left(1 - \frac{a_n}{z}\right)\right| = e^{\alpha \sum_1^M \frac{r_M}{r}} = e^{\alpha M \frac{r_M}{r}},$$

$$(11)\qquad \left|\prod_{M+1}^\infty \left(1 - \frac{z}{a_{n'}}\right)\right| = e^{\alpha_1 \sum_{M+1}^\infty \frac{r}{r_{n'}}};$$

les nombres α et α_1 étant compris entre -2 et 1. Mais d'après la définition de r, le quotient $\frac{r_M}{r}$ est égal à $M^{-\frac{K_1}{2}}$, et, par conséquent, l'égalité (10) devient

$$\left|\prod_1^M \left(1 - \frac{a_n}{z}\right)\right| = 1 - \varepsilon_1;$$

le nombre ε_1 étant compris entre $-\frac{4}{M^{\frac{K_1}{2}-1}}$ et $\frac{2}{M^{\frac{K_1}{2}-1}}$ c'est-à-dire arbitrairement petit.

Passons à l'égalité (11), si nous désignons par M' — la partie entière de $r^{R(r)}$, on a

$$(13)\qquad \sum_{M+1}^\infty \frac{1}{r_{n'}} = \sum_{M+1}^{M'} \frac{1}{r_{n'}} + \sum_{M'+1}^\infty \frac{1}{r_{n'}} < \frac{M'-M}{r_{M+1}} + \sum_{M'+}^\infty \frac{1}{r_{n'}};$$

mais on a bien facilement

$$\frac{1}{r_{n'}} < \frac{1}{n'^{\frac{1}{R(r)}}},$$

de sorte que nous pouvons écrire

$$\sum_{M'+1}^{\infty} \frac{1}{r_{n'}} < \int_{M'}^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{R(r)}}} = \frac{R(r)}{1 - R(r)} \frac{M'}{M'^{\frac{1}{R(r)}}};$$

or, d'après la définition de M′, on a

$$M' > r^{R(r)} > M' - 1,$$

donc

$$\frac{1}{M'^{\frac{1}{R(r)}}} < \frac{1}{r}, \qquad M' < 1 + r^{R(r)}$$

en portant dans l'inégalité précédente, elle prendra la forme

$$\sum_{M'+1}^{\infty} \frac{1}{r_{n'}} < h R(r) \frac{r^{R(r)}}{r}, \qquad h < 2;$$

ou encore, comme $R(r) r^{R(r)}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$, on aura

$$\sum_{M'+1}^{\infty} \frac{1}{r_{n'}} < \frac{\varepsilon_2}{r},$$

ε_2 étant arbitrairement petit, à condition que r_M soit suffisamment grand. Enfin, on a la suite d'inégalités suivantes

$$M' - M < M' - 1 < r^{R(r)} < r^{R(r_M)} = \left(r_M M^{\frac{K_1}{2}}\right)^{R(r_M)} = M e^{\frac{K_1}{2} R(r_M) \log M};$$

or, de l'inégalité évidente

$$R(r_M) \log M < R(r_M) M,$$

résulte que l'exposant de e dans l'inégalité précédente reste inférieure à un, tant que $\frac{K_1}{2}$ reste inférieur à K; donc

$$\frac{M' - M}{r_{M+1}} < \frac{M}{r_{M+1}} < \frac{1}{r} \frac{M}{M^{\frac{K_1}{2}}} < \frac{\varepsilon_2}{r},$$

ε_2 étant arbitrairement petit. Dans ces conditions, on voit que l'inégalité (13) donne

$$\sum_{M+1}^{\infty} \frac{1}{r_{n'}} < \frac{2\varepsilon_2}{r},$$

et cette valeur portée dans l'égalité (11) donnera

$$\left| \prod_{M+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{n'}}\right) \right| = 1 + \varepsilon'_1,$$

le nombre ε'_1 étant compris entre $-8\varepsilon_2$ et $4\varepsilon_2$, c'est-à-dire arbitrairement petit. En résumé, on voit que, si petit que soit ε, on peut trouver M assez grand pour qu'on ait

$$\left| \prod_{1}^{M} \left(1 - \frac{a_n}{z}\right) \prod_{M+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{n'}}\right) \right| < 1 + \varepsilon,$$

le module r de z étant compris entre $r_M M^{1+s}$ et $r_M M^{\frac{K}{2}}$ $(s > 0)$. Pour de telles valeurs de z on aura donc l'égalité

$$(14) \qquad f(z) = \frac{z^M}{a_1 a_2 \ldots a_M} [1 + \varepsilon(z)].$$

La proposition en vue est ainsi démontrée.

4. Toute la démonstration précédente résulte de l'hypothèse que l'inégalité (8) a lieu pour une infinité d'indices principaux; elle exige d'ailleurs simplement que le nombre K soit supérieur à 2; on pourrait obtenir ainsi une légère extension du théorème, mais on obtiendra une extension plus importante de la façon suivante : *lorsqu'on a*

$$\lim_{n=\infty} \frac{r_n}{r_{n+1}} = 0,$$

on a pour n suffisamment grand

$$(15)\quad \prod_{2}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{z}\right) = \frac{z^{n-1}}{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\left(1-\frac{z}{a_{n+1}}\right)[1+\varepsilon(z)],$$

pour les valeurs de $|z|$ *vérifiant l'inégalité*

$$a_n \leqq |z| \leqq a_{n+1} \quad (^1).$$

On a en effet

$$(16)\qquad \left|\prod_{1}^{n-1}\left(1-\frac{a_i}{z}\right)\right| = e^{\frac{\alpha \sum_{1}^{n-1} r_i}{r}},$$

$$(17)\qquad \left|\prod_{n+2}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_i}\right)\right| = e^{\alpha_1 r \sum_{n+2}^{\infty} \frac{1}{r_i}},$$

les nombres α et α_1 étant compris entre -2 et 1; or, d'après l'hypothèse faite, on peut, étant donné un nombre K supérieur à 1, trouver N tel que, pour $i > N$, on ait

$$\frac{r_i}{r_{i+1}} < \frac{1}{K};$$

on aura alors

$$\sum_{1}^{n=1} r_i < N r_N + r_{n-1} \sum_{0}^{n=N} \frac{1}{K^p} < N r_N + \frac{K}{K-1} r_{n-1},$$

et par suite

$$\frac{1}{r}\sum_{1}^{n-1} r_i < \frac{N r_N}{r_n} + \frac{K}{K-1}\,\frac{r_{n-1}}{r_n},$$

---

(1) Cette proposition est donnée par M. Mattson dans le cas où $\frac{r_{n+1}}{r_n} < e^{n^a}$, $a > 0$

cette quantité tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, le produit (16) a donc pour limite un. De la même façon, on trouvera

$$\sum_{n+2}^{\infty} \frac{1}{r_i} < \frac{1}{r_{n+2}} \frac{K}{K-1},$$

le produit (17) a aussi pour limite *un* et la proposition est démontrée.

On démontrerait de même la proposition suivante : *lorsqu'on a, à partir d'une certaine valeur de n, l'inégalité*

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} < c < 1,$$

on a pour z suffisamment grand

$$(18) \qquad |f(z)| = \frac{r^{n-1}}{r_1 r_2 \ldots r_{n-1}} A \left|1 - \frac{z}{a_{n+1}}\right| \left|1 - \frac{z}{a_n}\right|,$$

où n est défini par les inégalités

$$r_n \leqq |z| = r \leqq r_{n+1},$$

et où A *est un nombre fini.*

5. Théorème de M. Wiman. — On sait que le théorème de M. Wiman relatif aux fonctions d'ordre non nul est le suivant : *Si $f(z)$ est une fonction d'ordre $\rho < \frac{1}{2}$, on a sur une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants l'inégalité*

$$|f(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}},$$

ε *étant arbitrairement petit.* La proposition se complique nécessairement pour les fonctions d'ordre nul, pour lesquelles l'exposant de convergence est une fonction de r ; elle est constituée, dans le cas général, par

l'égalité (10) de mon article déjà cité : *on a sur une infinité de cercles* (et même dans des couronnes) *de rayons indéfiniment croissants*

$$(19) \qquad |f(z)| = \left(\frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m}\right)^{1+\varepsilon} = e^{(1+\varepsilon')\int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x}\,dx},$$

r étant donné par l'égalité

$$(20) \qquad r = kr_N\, e^{\frac{\alpha}{\rho(r_N)}}, \qquad \alpha \text{ fini}, \qquad k > 1;$$

et N étant un *indice principal*, $\rho(x)$ un exposant net, et $\psi(x)$ la fonction inverse d'une fonction continue, non décroissante, définie par l'égalité

$$r_x = \varphi(x).$$

On peut, d'ailleurs, tirer de l'égalité (20) une inégalité tout à fait analogue à celle trouvée par M. Wiman. On a

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x}\,dx > \int_{r_N}^{r} \frac{\psi(x)}{x}\,dx > \mathrm{N}(\log r - \log r_N),$$

d'où, en appliquant l'égalité (20),

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x}\,dx > \frac{\alpha(1+\varepsilon_1)}{\rho(r_N)}\mathrm{N} = \log r_N\, \mathrm{N}^{1-\varepsilon_2};$$

mais, de l'égalité (20), résulte également les égalités

$$\log r_N = \log r(1-\varepsilon_4), \qquad \mathrm{N} > \frac{r^{\rho(r)}}{e^{\alpha}};$$

et l'on a par suite

$$(21) \qquad |f(z)| > r^{r^{\rho(r)(1-\varepsilon)}} \quad (^1).$$

(1) C'est sous cette forme que j'ai démontré le théorème de M. Wiman dans mon article des *Mathematische Annalen*, t. LXX. Dans tout ce qui suit les nombres ε désignent des quantités positives, tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$ ou $\frac{1}{n}$, n'ayant aucune relation entre elles.

Cette inégalité, moins précise que l'égalité (19) met bien en évidence le théorème, si l'on remarque que l'on a, quel que soit $|z| > r_0$,

(22) $$|f(z)| < e^{(1+\varepsilon)\int_{r_0}^{r} \frac{x^{\rho(x)}}{x} dx} < r^{r^{\rho(r)}(1+\varepsilon)}.$$

L'application de l'inégalité (21) est d'ailleurs bien aisée; supposons, par exemple, que $\theta(x)$ étant une fonction décroissante, et $\theta(x)\log x$ une fonction croissante, *on ait pour* $n > n_0$

(23) $$n < r_n^{\theta(r_n)(1+\varepsilon)},$$

et pour une infinité de valeurs de n

(24) $$n > r_n^{\theta(r_n)(1-\varepsilon)},$$

et ceci quel que soit le nombre positif ε, pourvu que n soit assez grand. Il existera alors une fonction *exposant net* $\rho(x)$, vérifiant, quel que soit $x > \chi$, les inégalités

$$\theta(x)(1-\varepsilon) < \rho(x) < \theta(x)(1+\varepsilon);$$

on aura donc, pour une infinité de valeurs de r,

(25) $$|f(z)| > r^{r^{\theta(r)(1-\varepsilon)}}$$

et, quel que soit r,

(26) $$|f(z)| < r^{r^{\theta(r)(1+\varepsilon)}}.$$

On obtiendrait toute une série de résultats en donnant à $\theta(x)$ des valeurs particulières; mais il est bien évident que l'égalité (19) qui renferme toutes ces formules, ainsi que l'inégalité (21), est beaucoup plus précise.

C'est ainsi qu'elle donnera les précisions du théorème de M. Wiman, dans certains cas de croissance irrégu-

lière, que j'ai indiqués dans mon article cité dans la Note précédente. Mais c'est principalement dans les cas de croissance régulière que cette égalité sera utile et précisera facilement le théorème général.

Il est bien aisé de voir que, tout au contraire, la précision fournie par l'égalité (15) ne pourra guère fournir de résultats généraux, puisque, pour utiliser le résultat obtenu, il serait nécessaire de connaître en fonction simple de r l'expression

$$\frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n}$$

à $1+\varepsilon$ près, ce qui ne semble possible que pour des valeurs très particulières de $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$. Cependant l'égalité (18) peut donner des résultats intéressants; on aura, par exemple, les deux résultats suivants :

I. *Si, pour $n > n_0$, on a*

$$r_n = e^n + \varepsilon_n, \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0;$$

on aura, à partir d'une certaine valeur de n,

$$|f(z)| = \mathrm{A}\, e^{\frac{1}{2}[(\log r)^2 - \log r]} \left|1 - \frac{z}{a_{n+1}}\right| \left|1 - \frac{z}{a_n}\right|, \qquad \mathrm{A} \text{ fini.}$$

II. *Si, pour $n > n_0$, on a*

$$r_n = e^{n^2} + \varepsilon_n, \qquad \lim \varepsilon_n = 0,$$

on aura, pour n suffisamment grand,

$$|f(z)| = \mathrm{A}\, e^{\frac{2}{3}(\log r)^{\frac{3}{2}} - \frac{\log r}{2} + h(\log r)^{\frac{1}{2}}} \left|1 - \frac{z}{a_{n+1}}\right| \left|1 - \frac{z}{a_n}\right|.$$

On obtiendra aisément des résultats analogues.

[L¹16a]

SUR LES DÉVELOPPOÏDES DE L'ELLIPSE;

PAR M. F. GOMÈS TEIXEIRA.

Considérons l'ellipse représentée par les équations paramétriques

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t,$$

et cherchons l'enveloppe d'une droite D passant par un point variable (x, y) de cette ellipse et faisant un angle constant ω avec la tangente à cette courbe en le point mentionné.

L'équation de la droite D est

$$Y - b\sin t = \frac{b\cot t + am}{bm\cot t - a}(X - a\cos t),$$

où $m = \operatorname{tang}\omega$, ou

$$b(mY - X)\cos t - a(Y + mX)\sin t + \frac{1}{2}c^2 m \sin 2t + ab = 0,$$

en faisant

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

L'enveloppe des positions que cette droite prend, quand le point (x, y) parcourt l'ellipse, est déterminée par cette équation et par celle qu'on obtient en la dérivant par rapport à t, savoir :

$$b(mY - X)\sin t + a(Y + mX)\cos t - c^2 m\cos 2t = 0.$$

Changeons maintenant les axes des coordonnées, en prenant pour nouveaux axes deux droites perpendiculaires l'une à l'autre passant par le centre de l'ellipse

et faisant des angles égaux à ω avec les axes de cette courbe; et pour cela posons

$$X_1 = X\cos\omega - Y\sin\omega, \qquad Y_1 = X\sin\omega + Y\cos\omega.$$

Les équations précédentes deviennent

$$bX_1\cos t + aY_1\sin t - \frac{1}{2}c^2\sin\omega\sin 2t - ab\cos\omega = 0,$$
$$bX_1\sin t - aY_1\cos t + c^2\sin\omega\cos 2t = 0.$$

L'enveloppe considérée, c'est-à-dire la développoïde de l'ellipse, peut donc être représentée par les équations paramétriques

$$X_1 = \frac{c^2\sin\omega}{b}\sin^3 t + a\cos\omega\cos t,$$
$$Y_1 = \frac{c^2\sin\omega}{a}\cos^3 t + b\cos\omega\sin t.$$

Posons maintenant

$$X_1 = X_2, \qquad aY_1 = bY_2.$$

les équations prennent la forme

$$X_2 = \frac{c^2}{b}\sin\omega\sin^3 t + a\cos\omega\cos t,$$
$$Y_2 = \frac{c^2}{b}\sin\omega\cos^3 t + a\cos\omega\sin t.$$

Or, ces équations représentent (comme on peut le voir, par exemple, dans notre *Traité des courbes spéciales*, t. I, p. 334) une courbe parallèle à l'astroïde définie par les équations

$$X_1 = \frac{c^2}{b}\sin\omega\sin^3 t, \qquad Y_1 = \frac{c^2}{b}\sin\omega\cos^3 t.$$

Donc, nous avons le théorème suivant, qui n'a pas encore été peut-être signalé :

Les développoïdes de l'ellipse sont des courbes affines des lignes parallèles à une astroïde.

Il résulte encore de ce qui précède que l'équation cartésienne de la développoïde de l'ellipse peut être déduite immédiatement de celle des courbes parallèles à l'astroïde (*loc. cit.*, p. 338). On trouve ainsi

$$\begin{aligned}[3(b^2X_1^2+a^2Y_1^2-c^4\sin^2\omega)-4a^2b^2\cos^2\omega]^3 \\ +b^2[27ac^2X_1Y_1\sin\omega-9a\cos\omega(b^2X_1^2+a^2Y_1^2) \\ -18ac^4\cos\omega\sin^2\omega+8a^3b^2\cos^3\omega]^2=0.\end{aligned}$$

Remarquons enfin que, en tenant compte d'un théorème connu (*loc. cit.*, p. 336), on peut encore énoncer le théorème donné ci-dessus de la manière suivante :

Chaque développoïde de l'ellipse est une courbe affine d'une autre qui enveloppe une droite qui se déplace de manière que le segment compris entre deux autres droites fixes soit constant.

Les équations des droites fixes sont

$$(2abY_1\cos\omega-c^2X_1\sin\omega)^2=(c^4\sin^2\omega-4a^2b^2\cos^2\omega)X_1^2$$

et ces droites sont donc réelles quand

$$\tan\!g^2\omega>\frac{4a^2b^2}{c^4}\cdot$$

[M¹15b]

SUR L'HYPOCYCLOIDE A TROIS REBROUSSEMENTS

(*suite et fin*);

PAR M. J. LEMAIRE.

SYSTÈME DE QUATRE TANGENTES A UNE H_3.

30. Proposons-nous de construire l'hypocycloïde tangente à quatre droites : Si trois des tangentes

données partent d'un même point A, et coupent la quatrième en B, C, X, la courbe à construire est l'enveloppe des droites $\Delta(\theta)$ relatives à ABC, θ étant l'angle de XA avec BC; nous savons obtenir le cercle inscrit dans l'hypocycloïde qui est alors bien déterminée.

Dans le cas général, BC, CA, AB, et $\alpha\beta\gamma$ étant les droites données, la parallèle menée par A à $\alpha\beta\gamma$ coupe en α' le cercle ABC, et la parallèle menée par A à $\alpha\alpha'$ est la troisième tangente issue de A; on est ramené au cas précédent.

Si l'on se donne trois tangentes BC, CA, AB, et le point de contact A_1 de BC, le parallélogramme AA_2A_1X (*fig.* 6) détermine AX.

Nous avons vu (16) comment construire une H_3 tangente à deux droites données en deux points donnés.

Supposons encore connus un point A_1 et le cercle osculateur en ce point, et une autre tangente quelconque AB : la corde $A_2A_1A'_2$ interceptée (*fig.* 5) par le cercle O sur la normale en A_1, valant quatre fois la distance du centre ω de l'hypocycloïde à BC, est la moitié du rayon de courbure en A_1; comme $\widehat{ABA'_2}$ est droit, les données permettent d'obtenir B, A'_2, A_2, d'où le cercle O, et le triangle ABC, qui est un triangle T, et par suite le cercle inscrit dans l'hypocycloïde.

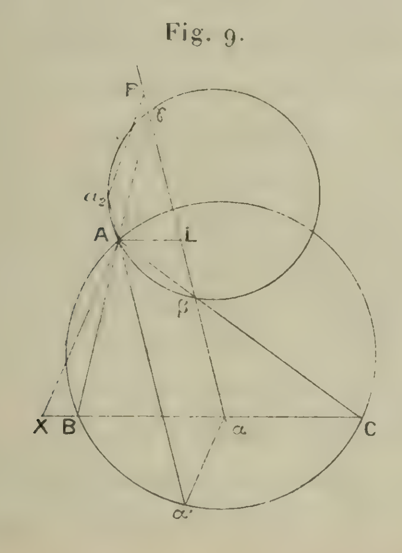
Enfin, si les quatre tangentes données sont confondues, ou si l'on connaît un point de l'hypocycloïde, et la parabole osculatrice en ce point, les propriétés de cette parabole et la figure 4 donnent le centre de la courbe et le cercle tritangent.

31. Pour obtenir, dans le cas général, le point de contact de $\alpha\beta\gamma$ avec l'hypocycloïde, il suffit d'appliquer au triangle $A\beta\gamma$ la remarque du n° 24, et de

mener, par le point où le cercle $A\beta_1\gamma_1$ coupe la parallèle Aa_2 à $\beta_1\gamma_1$, la parallèle à AX, troisième tangente issue de A : le point P où cette droite coupe $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ est le point de contact (*fig.* 9).

Remarquons que, AX étant parallèle à la droite qui joint α à l'extrémité α' de la corde $A\alpha'$ parallèle à $\alpha_1\beta_1\gamma_1$,

Fig. 9.



$a_2\alpha'\alpha P$ est un parallélogramme. Menons par A la parallèle à BC qui coupe $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ en L, la figure donne

$$P\alpha = A\alpha' + A\alpha_2.$$

Si $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ se déplace en conservant une direction fixe, $\dfrac{Aa_2}{AL}$ conserve une valeur constante λ, et $P\alpha$ a pour valeur

$$P\alpha = A\alpha' + \lambda\, AL,$$

de sorte que P décrit une droite, et l'on a ce théorème énoncé par M. Bickart (*Revue de Mathématiques spéciales*, 1908) : *Le lieu géométrique du point de contact d'une hypocycloïde inscrite à un triangle avec une tangente de direction fixe est une droite.*

32. Énonçons les propositions suivantes, faciles à obtenir :

Les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles déterminés par quatre tangentes à une H_3 sont sur un cercle passant au foyer de la parabole tangente à ces droites, et égal au cercle tritangent.

ABC étant un triangle circonscrit à une H_3, une tangente variable forme avec les côtés trois triangles : les centres des cercles qui leur sont circonscrits sont les sommets d'un triangle de *grandeur constante*, *semblable à* ABC, et inscrit dans un cercle égal au cercle tritangent et passant au centre du cercle ABC.

Si un quadrilatère circonscrit à une H_3 est inscriptible dans un cercle, sa troisième diagonale est tangente à la courbe, et réciproquement; cela résulte de ce que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel quadrilatère soit inscriptible est que $\alpha + \gamma \equiv \beta + \delta$ (à $k\pi$ près), α, β, γ, δ désignant les angles des côtés avec $U'U$.

Utilisant cette remarque et le théorème de Laguerre (3), nous trouvons que : si un quadrilatère circonscrit à une H_3 est inscriptible dans un cercle, le quadrilatère formé par les tangentes adjointes des côtés, et le quadrilatère formé par les troisièmes tangentes issues des sommets du premier, sont aussi inscriptibles; et leurs troisièmes diagonales coïncident avec la tangente adjointe de la troisième diagonale du quadrilatère donné.

Les quatre quadrilatères formés chacun par les troisièmes tangentes issues de deux sommets opposés, et par les tangentes adjointes de deux côtés opposés du quadrilatère primitif, possèdent les mêmes propriétés.

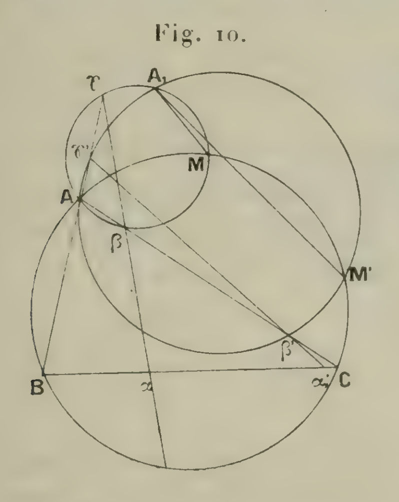
Si de deux points d'une tangente à une H_3 on mène

deux tangentes, la parabole qui touche ces quatre droites a son foyer sur la première tangente.

Systèmes de cinq tangentes a une H_3.

33. Soient cinq droites, dont trois forment un triangle ABC, les deux autres étant $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ (*fig.* 10); M, point commun aux cercles ABC et $A\beta\gamma$,

Fig. 10.



est le foyer de la parabole tangente aux quatre premières droites; M′, point commun aux cercles ABC et $A\beta'\gamma'$, est le foyer de la parabole tangente aux trois premières droites et à $\alpha'\beta'\gamma'$; A_1, point commun aux cercles $A\beta\gamma$ et $A\beta'\gamma'$, est le foyer de la parabole tangente à AB, AC, $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$.

$\alpha\beta\gamma$ est la droite $\Delta(\theta)$ de M relative au triangle ABC, l'angle θ étant l'angle que font respectivement $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ avec BC, CA, AB. De même $\alpha'\beta'\gamma'$ est la droite $\Delta(\theta')$ de M′, θ' étant l'angle analogue.

On voit fort aisément que A_1M' fait avec A_1M un angle $(\theta' - \theta)$. B_1 et C_1 désignant les foyers des deux paraboles tangentes : la première à BC, BA, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, et la deuxième à CA, CB, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, les droites B_1M'

et C_1M' font avec B_1M et C_1M respectivement le même angle $(\theta' - \theta)$.

On a le *théorème de Miquel :* les foyers des cinq paraboles déterminées par cinq tangentes associées quatre à quatre appartiennent à un même cercle; on l'appelle le *cercle de Miquel* des cinq droites.

Pour que les cinq droites soient tangentes à une H_3, *il faut et il suffit que* $\theta' = \theta$, *c'est-à-dire que le cercle de Miquel se réduise à une droite.* Nous appellerons cette droite *la droite de Miquel des cinq tangentes.*

Ce beau théorème est dû à P. Serret.

Si nous désignons par a, b, c, d les angles, avec $U'U$, des tangentes BC, CA, AB, $\alpha\beta\gamma$ d'une H_3, la dernière est la droite $\Delta(\theta)$ de M par rapport à ABC, l'angle θ ayant pour valeur

$$\theta \equiv \frac{\pi}{2} - (a + b + c).$$

Soient une autre tangente $\alpha'\beta'\gamma'$, droite $\Delta(\theta)$ de M', d' son angle avec $U'U$, ω celui de MM'; utilisant les propriétés des droites $\Delta(\theta)$, on obtient sans peine la relation

$$a + b + c \equiv \omega + d + d' - 2\theta,$$

d'où

$$(1) \qquad a + b + c + d + d' + \omega \equiv 0.$$

De la symétrie de cette relation en a, b, c, d, d', résulte que les droites qui joignent les foyers de deux des paraboles tangentes à quatre des cinq tangentes données ont même direction; nous retrouvons que le cercle de Miquel des cinq tangentes se réduit à une droite, dont l'égalité (1) donne la direction.

34. Dans ces conditions, les faisceaux $(M, M'\alpha\beta\gamma)$

et $(M', M\alpha'\beta'\gamma')$ ayant leurs droites respectivement parallèles, sont égaux; m et m' désignant les traces de MM' sur $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$, on a alors

$$(m\alpha\beta\gamma) = (m'\alpha'\beta'\gamma');$$

d'où ce théorème : *Les droites* $\Delta(\theta)$ *des deux points* M *et* M', *et la droite* MM' *touchent une même conique inscrite à* ABC; autrement dit : *la droite de Miquel de cinq tangentes à une* H_3 *touche la conique tangente aux cinq droites.*

Énonçons les conséquences suivantes de (1) :

La droite de Miquel de quatre tangentes fixes a, b, c, d, *et d'une tangente variable* d' *forme avec celle-ci des angles dont les bissectrices ont des directions fixes.*

Six tangentes formant un triangle $T(\theta)$ *et un triangle* $T(-\theta)$, *chacune d'elles est parallèle à la droite de Miquel des autres.*

Si trois tangentes sont fixes, et si deux autres se coupent sur une tangente fixe, leur droite de Miquel a une direction invariable.

Les tangentes adjointes de cinq tangentes données ont une droite de Miquel parallèle à la tangente adjointe de la tangente parallèle à la droite de Miquel des premières. Il en est de même pour les troisièmes tangentes issues des sommets de tout polygone formé par les cinq premières, etc.

Étant données cinq tangentes, dont trois issues d'un point P, *deux d'un point* Q, *leur droite de Miquel passe en* P *et est parallèle à la troisième tangente issue de* Q.

Si donc on leur joint cette troisième tangente, ces six droites, prises cinq à cinq, ont six droites de

Miquel symétriques des tangentes par rapport au milieu de PQ. Les foyers des neuf paraboles déterminées en associant deux tangentes issues de P à deux tangentes issues de Q sont trois à trois sur ces droites symétriques des tangentes.

35. *Sur la parabole* Π *tangente à quatre tangentes* α, β, γ, δ *d'une* H_3. — A l'aide des propriétés de la droite de Simson on établit aisément que :

L'enveloppe des axes des paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle est une H_3 inversement homothétique, dans le rapport de 2 à 1, par rapport au centre de gravité du triangle ABC, de l'hypocycloïde enveloppe des droites de Simson de ce triangle; cette enveloppe des axes est tritangente au cercle circonscrit à ABC, qu'elle touche au point situé au tiers de l'arc AA_2 sous-tendu par la corde parallèle à BC, à partir de A, et aux deux points analogues. Des propriétés obtenues plus haut, on déduit les suivantes :

Les tangentes α, β d'une H_3 se coupant en P, et γ, δ en Q, le *foyer* F *de la parabole* Π tangente à ces quatre droites est symétrique, par rapport au milieu de PQ, du point commun aux troisièmes tangentes issues de P et Q.

Si donc on joint le foyer d'une parabole aux six sommets d'un quadrilatère circonscrit, la parallèle menée par chaque sommet à la droite joignant au foyer le sommet opposé touche l'hypocycloïde inscrite au quadrilatère; cela résultait d'ailleurs des propriétés immédiates des droites $\Delta(\theta)$.

Les troisièmes tangentes issues de chacun des trois couples de sommets opposés se coupent sur une même tangente à l'hypocycloïde; *l'axe de la parabole* est

parallèle à cette tangente. Son angle avec U'U est égal à $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta+\gamma+\delta\right)$, à $k\pi$ près.

Si donc on remplace δ par une autre tangente ε, l'angle des axes des deux paraboles est égal à celui de ces deux tangentes δ et ε; on en conclut que si cinq tangentes α, β, γ, δ, ε d'une H_3 forment un pentagone, les axes des cinq paraboles déterminées par ces tangentes associées quatre à quatre forment un pentagone qui a ses angles égaux à ceux du premier, et disposés dans l'ordre inverse.

ω désignant l'angle, avec U'U, de la droite de Miquel de cinq tangentes α, β, γ, δ, ε; ε' celui de l'axe de la parabole tangente aux quatre premières, les relations

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\omega\equiv 0,$$
$$\varepsilon'\equiv\alpha+\beta+\gamma+\delta+\frac{\pi}{2}$$

donnent

$$\varepsilon+\omega+\varepsilon'\equiv\frac{\pi}{2}.$$

Par suite, *chacune des cinq tangentes est coupée par la tangente parallèle à l'axe de la parabole tangente aux quatre autres sur une tangente fixe*, qui est *parallèle à la droite de Miquel des cinq tangentes*.

Le paramètre de la parabole $\Pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est égal à la valeur absolue de

$$8r\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\beta+\gamma+\delta)\cos(\gamma+\delta+\alpha)\cos(\delta+\alpha+\beta),$$

et aussi à

$$p=\frac{R_\alpha R_\beta R_\gamma R_\delta}{2r^3},$$

R_α, R_β, R_γ, R_δ désignant les rayons des cercles circonscrits aux triangles formés par les tangentes données.

La conique inscrite au triangle (α, β, γ), et tangente

à l'hypocycloïde au point de contact de δ, touche la tangente menée par le foyer F de la parabole Π au cercle circonscrit au triangle.

Si le quadrilatère formé par les tangentes données est inscriptible dans un cercle, le foyer F est sur la troisième diagonale, qui touche en φ l'hypocycloïde; $F\varphi$ et cette diagonale ont le même milieu.

La distance des foyers F et F' des deux paraboles $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta')$ tangentes à trois tangentes α, β, γ d'une H_3, et à deux autres δ et δ' respectivement, est égal à la valeur absolue de

$$2r\cos(\alpha + \beta + \gamma)\sin(\delta - \delta').$$

Si les tangentes δ et δ' se déplacent en faisant un angle constant, FF' reste constante, et enveloppe un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle des tangentes α, β, γ.

En particulier, à deux tangentes rectangulaires respectivement associées à trois tangentes α, β, γ, correspondent deux paraboles dont les axes sont rectangulaires, et les foyers deux points diamétralement opposés du cercle circonscrit au triangle $(\alpha\beta\gamma)$.

Le cercle passant aux foyers des paraboles $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta')$ et au point commun à leurs axes est égal au cercle circonscrit au triangle des trois tangentes α, β, γ.

Si, à deux tangentes δ, δ' on associe trois autres tangentes α, β, γ, deux à deux, on détermine trois paraboles dont les axes forment un triangle inversement semblable au triangle des tangentes α, β, γ.

Si $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, Π devient la parabole ayant, au point de contact de la tangente α, *un contact du troisième ordre* avec l'hypocycloïde; l'expression du paramètre devient $8r\cos^3 3\alpha$, qu'on déduirait aussi de la

construction donnée au n° 9; la directrice et le foyer de cette parabole peuvent être retrouvés aussi à l'aide des considérations actuelles.

Le rayon de courbure ρ en un point et le paramètre p' de la parabole surosculatrice au même point sont liés entre eux, et au rayon r du cercle tritangent, par la relation

$$\rho^4 = 512 p' r^3.$$

Dans le cas particulier où les tangentes α, β, γ, δ ont leurs points de contact en ligne droite, le quadrilatère qu'elles forment et la parabole inscrite possèdent encore des propriétés intéressantes.

36. *Propriété de cinq tangentes.* — Nous avons vu (19) que si trois tangentes a, b, c à une H_3 forment trois triangles avec deux autres tangentes d, d', les orthocentres de ces triangles sont sur un cercle passant au point (d, d') et ayant son centre sur le cercle tritangent. Or, ces orthocentres sont les sommets du triangle formé par les directrices des paraboles respectivement tangentes aux droites b, c, d, d'; c, a, d, d'; a, b, d, d'.

On a ainsi ce théorème : *Étant données cinq tangentes à une* H_3, *en associant deux d'entre elles successivement avec deux des trois autres, on détermine trois paraboles, dont les directrices forment un triangle inscrit dans un cercle, qui passe au point commun aux deux premières tangentes, et qui a son centre sur le cercle tritangent.*

Ce triangle est inversement semblable au triangle des trois tangentes a, b, c.

Digression sur une conique remarquable du plan d'un triangle.

37. On sait que les symétriques, par rapport aux milieux des côtés d'un triangle, des points où ces côtés

sont coupés par une droite Δ, sont sur une droite Δ'; Δ se déduit de même de Δ'. Si Δ tourne autour d'un point fixe P, Δ' enveloppe une conique tangente aux côtés du triangle aux points symétriques, par rapport à leurs milieux, des traces de PA, PB, PC, sur ces côtés; toute conique inscrite au triangle peut être obtenue de cette manière.

Si P est l'orthocentre H du triangle, la conique correspondante, que nous appellerons S, possède d'intéressantes propriétés qui nous seront utiles, et que nous nous contenterons d'énoncer :

Premier cas. — *Le triangle* ABC *est acutangle.* — La conique S touche les côtés aux points A_1, B_1, C_1 symétriques, par rapport aux milieux A', B', C', de ces côtés, des pieds D, E, F des hauteurs correspondantes.

S *est la conique concentrique au cercle circonscrit à* ABC, *et tangente aux trois côtés : c'est une ellipse inscrite au triangle.*

Les hauteurs du triangle sont normales à S; *les normales en* A_1, B_1, C_1 *concourent au point* K *symétrique de* H *par rapport au centre* O *du cercle circonscrit.*

Le demi-diamètre conjugué de OA_1 est égal au segment $A_1A'_1$ perpendiculaire à BC, extérieur au triangle, et limité au cercle, ou encore à HD, ou AA'', en appelant A'' le point où OA_1 coupe AD. Si R désigne le rayon du cercle O, et a, b les demi-axes de S.

$$a = \frac{R + OH}{2}, \quad b = \frac{R - OH}{2} \qquad \text{ou} \qquad R = a + b, \quad OH = a - b,$$

Les cercles de Chasles de l'ellipse S *sont le cercle*

circonscrit au triangle et le cercle concentrique passant en H. *L'axe focal coïncide en direction avec la bissectrice de* $\widehat{A'_1 O A''_1}$, A''_1 symétrique de A'_1 par rapport à A_1.

O et H restant fixes, ainsi que le cercle, si le triangle se déforme, A se déplaçant sur le cercle dans un sens déterminé, l'ellipse S reste constante en grandeur, mais tourne autour de O; le point de concours K des normales aux points de contact des côtés reste fixe. On conclut de là que : *Le cercle de Chasles* Γ, *de rayon* $(a+b)$, *d'une ellipse, est circonscrit à une infinité de triangles circonscrits à l'ellipse; ces triangles sont acutangles, leurs hauteurs sont normales à l'ellipse; les normales aux points où elle touche les côtés d'un triangle concourent au point* K *symétrique de l'orthocentre* H *de ce triangle par rapport au centre de l'ellipse;* H *et* K *appartiennent au second cercle de Chasles* Γ' *de rayon* $(a-b)$. Ces dernières propriétés ont été données par M. Barisien (*Nouv. Ann.*, 1911).

Deuxième cas. — *Le triangle* ABC *a un angle obtus* A. — L'orthocentre H est alors extérieur au cercle O; il y a peu de changements à apporter à ce qui précède : la conique S est encore une ellipse de centre O, mais *ex-inscrite* au triangle, touchant le côté opposé à l'angle obtus et les prolongements des autres; les remarques relatives aux hauteurs, et aux normales aux points où S touche les côtés, s'appliquent; a et b désignant encore les demi-axes

$$a = \frac{OH + R}{2}, \quad b = \frac{OH - R}{2} \qquad \text{ou} \qquad R = a - b, \quad OH = a + b.$$

On a

$$R < OH < 3R, \quad \text{d'où} \quad a > 2b,$$

et tandis que, dans le cas d'un triangle acutangle, aucune condition n'est imposée à a et b, dans le cas actuel on a $a > 2b$; cette condition, qui exprime que le second cercle de Chasles coupe l'ellipse en des points réels, étant remplie, on a ce théorème : *Le cercle de Chasles* Γ', *de rayon* $(a - b)$, *d'une ellipse est circonscrit à une infinité de triangles auxquels l'ellipse est ex-inscrite; ces triangles ont un angle obtus; leurs hauteurs sont normales à l'ellipse; les normales aux points où elle touche les côtés concourent en* K, *symétrique de l'orthocentre* H *du triangle par rapport au centre de l'ellipse;* H *et* K *appartiennent à l'autre cercle de Chasles* Γ.

Troisième cas. — *Le triangle* ABC *est rectangle en* A. — L'orthocentre est alors en A; la transversale réciproque Δ' de toute droite Δ passant en A, et autre que AB et AC, coïncide avec BC; celle de AB est indéterminée et passe en C; de même pour AC. En considérant ce cas comme la limite des précédents, on est conduit à dire qu'alors S se réduit au segment de droite BC.

Normales a l'hypocycloïde. — Ellipses tritangentes.

38. La développée d'une H_3 étant une H_3, d'un point on peut mener trois normales au plus à la première; ces normales sont inversement homothétiques des tangentes parallèles, dans le rapport de 3 à 1, par rapport au centre ω de la courbe. Donc, *si trois tangentes concourent en* H, *les normales parallèles*

concourent au point K *de* ω H, *tel que* $\overline{\omega K} = -3\overline{\omega H}$, *et réciproquement.*

Le lieu des points d'où partent deux normales rectangulaires est le cercle des rebroussements.

Nous savons que *les normales perpendiculaires aux côtés d'un triangle* T *concourent.* Réciproquement, *les tangentes menées aux pieds des normales issues d'un point* K *forment un triangle* T : car la tangente qui forme un triangle T avec deux des tangentes données ne peut différer de la troisième, puisqu'elles correspondent à la même normale.

Le théorème de Laguerre (3) et sa réciproque s'appliquent aux normales issues d'un point.

39. Si ABC est un triangle T d'une H_3, les points A_1, B_1, C_1 de contact des côtés sont précisément les points où ces côtés touchent la conique S de ce triangle (37), de sorte que cette conique est tritangente à l'hypocycloïde; donc *les pieds des normales issues d'un point sont les points de contact d'une ellipse tritangente*, car les tangentes en ces points forment un triangle T.

Réciproquement, *les points de contact de toute conique tritangente sont les pieds des normales issues d'un point :* on sait que, si par quatre points d'une cubique passe une conique variable, la droite qui joint les deux autres points communs à ces courbes coupe la cubique en un point fixe; cela est vrai en particulier pour une conique tangente en deux points fixes à la cubique.

Corrélativement, si une conique touche une courbe de troisième classe en deux points fixes, les deux autres tangentes communes se coupent sur une tangente fixe; si ces deux tangentes viennent à coïncider, leur point

de contact commun ne peut différer de celui de cette tangente fixe; autrement dit, de toutes les coniques tangentes à une courbe de troisième classe en deux points fixes, une seule a un troisième contact avec elle. Ceci posé, si A, B, C sont les points de contact d'une H_3 et d'une conique, et si du point P commun aux normales en A et B, on mène la troisième normale PC′, les points A, B, C′ étant les contacts d'une conique tritangente, C′ ne peut différer de C, ce qui démontre la proposition.

Ainsi, *les ellipses* S *attachées aux triangles* T *d'une* H_3 *sont les seules coniques tritangentes à cette courbe.*

40. En résumé, à tout triangle T correspond une ellipse tritangente, et réciproquement : si T est acutangle, on a

$$a + b = R = 2r,$$
$$a - b = OH = 2\,\omega O,$$

a, b désignant les demi-axes de l'ellipse; R le rayon du cercle O circonscrit au triangle T, double du rayon r du cercle inscrit dans l'hypocycloïde; ω le centre de la courbe, H l'orthocentre de T.

Si T est obtusangle

$$a - b = R = 2r,$$
$$a + b = OH = 2\,\omega O.$$

Si T est rectangle, $b = 0$, S se réduit à l'hypoténuse du triangle, qui est une corde de l'hypocycloïde tangente à la courbe; on retrouve qu'une telle corde est égale à $4r$, etc.

On peut finalement énoncer ce théorème :

Il existe deux familles d'ellipses tritangentes à

une H_3, *et les tangentes aux points de contact de chacune forment un triangle* T.

Pour l'une des familles, T *est acutangle; l'ellipse est intérieure à l'hypocycloïde; le cercle circonscrit à* T *est le grand cercle de Chasles de l'ellipse; l'autre cercle de Chasles a pour diamètre* HK, H *désignant l'orthocentre du triangle*, *et* K *le point de concours des normales aux points de contact des deux courbes; la somme des axes de ces ellipses est constante et égale à* $4r$; *leurs centres sont intérieurs au cercle inscrit dans l'hypocycloïde.*

Pour l'autre famille, T *est obtusangle; l'ellipse n'est pas intérieure à l'hypocycloïde, qu'elle coupe en deux points réels* (on peut s'en rendre compte en prouvant, par un calcul simple, que le rayon de courbure au point de contact des deux courbes opposé à l'angle obtus du triangle des tangentes communes est plus grand pour l'ellipse que pour l'hypocycloïde); *le cercle circonscrit à* T *est le petit cercle de Chasles de l'ellipse; l'autre cercle de Chasles a pour diamètre* HK; *la différence des axes de ces ellipses est égale à* $4r$; *leurs centres sont extérieurs au cercle inscrit dans l'hypocycloïde.*

Certaines de ces propriétés ont fait l'objet de la question du concours général en 1899.

41. ω étant le milieu de OH, O celui de HK, on peut dire que : *toutes les ellipses tritangentes dont les centres sont équidistants du centre de l'hypocycloïde sont égales; le point de concours des normales aux points de contact de chaque ellipse décrit un cercle concentrique à l'hypocycloïde.*

Supposant que K vienne en un point P de la déve-

loppée de l'hypocycloïde et appliquant les résultats précédents, nous voyons que :

En chaque point C d'une H_3 passe une ellipse E ayant en ce point un contact du troisième ordre avec la courbe, et la touchant en un autre point C_1 ; la normale en C_1 passe au centre de courbure P des courbes en C; la tangente en C_1 est perpendiculaire à la tangente adjointe à la tangente en C à l'hypocycloïde, et touche le petit cercle de Chasles de E sur la tangente en C à l'ellipse; le grand cercle de Chasles passe en P; le lieu du centre de E est la courbe symétrique de l'hypocycloïde donnée par rapport à son centre, etc.

Hypocycloides tritangentes a une ellipse.

42. De ce qui précède on déduit aussi que :

Il existe deux familles d'H_3 *tritangentes à une ellipse fixe* S, *d'axes* $2a$ *et* $2b$: *pour l'une, les points de contact sont les points où* S *touche les côtés des triangles qui lui sont circonscrits et qui sont inscrits dans le grand cercle de Chasles* Γ *de l'ellipse; ces triangles qui sont acutangles sont des triangles* T *pour chaque* H_3; *ces* H_3 *sont toutes égales, le diamètre de leurs cercles inscrits valant* $(a+b)$; *ces cercles touchent les cercles décrits sur les axes de* S *comme diamètres; l'ellipse est intérieure à chacune des* H_3; *les centres de celles-ci sont sur le cercle concentrique à l'ellipse et de rayon* $\frac{a-b}{2}$; *les orthocentres des triangles des tangentes aux points de contact, et les points de concours des normales à* S *en ces points, sont symétriques par rapport au centre de la conique et décrivent son petit cercle de Chasles* Γ'.

Pour l'autre famille, qui n'existe que si $a > 2b$, *les points de contact sont les points où l'ellipse touche les côtés des triangles, auxquels elle est ex-inscrite, et qui sont incrits dans le cercle* Γ'; *ces triangles qui sont obtusangles sont des triangles* T *pour chaque* H_3; *ces* H_3 *sont toutes égales, le diamètre de leurs cercles inscrits ayant pour valeur* $(a - b)$; *ces cercles inscrits touchent les cercles décrits sur les axes de* S *comme diamètres; l'ellipse a deux points réels communs avec chaque* H_3, *autres que les points de contact; les centres des* H_3 *sont sur le cercle concentrique à l'ellipse et de rayon* $\frac{a+b}{2}$; *les orthocentres des triangles des tangentes aux points de contact, et les points de concours des normales à* S *en ces points sont symétriques par rapport au centre de l'ellipse, et décrivent son grand cercle de Chasles* Γ.

Parmi les H_3 de cette seconde famille, quatre ont avec S un contact de troisième ordre aux points communs à S et à Γ' (41); soit C un de ces points, l'autre point de contact C_1 de l'H_3 correspondante est un point de contact d'une tangente commune à Γ' et à S; cette tangente commune touche Γ' en un point où passe la tangente en C à S, etc.

Concevons que l'ellipse S se déforme de manière que b devienne nul, a restant invariable; elle devient un segment fixe de longueur $2a$; les deux familles d'H_3 tritangentes se confondent en une seule famille d'H_3 tangentes au segment et passant en ses extrémités; de ce qui précède on déduirait des propriétés de cette famille de courbes; on retrouverait, entre autres, des propositions connues.

Tangentes communes a une H_3 et a une conique. Systèmes de six tangentes.

43. On démontre aisément par le calcul, et il résulte d'un théorème de M. G. Humbert (*Théorie des fonctions algébriques*, Appell et Goursat) *que la somme des angles que font, avec une droite déterminée, les tangentes communes à une* H_3 *et à une conique quelconque est constante*. En particulier, si la droite fixe est la tangente $U'U$ à l'hypocycloïde en un de ses sommets, *la somme des six angles est égale à* $k\pi$, k entier; réciproquement, six tangentes à une H_3 vérifiant cette condition touchent une conique.

De là résultent de nombreuses conséquences, dont voici quelques-unes :

Les tangentes adjointes des six tangentes communes à une H_3 et à une conique touchent une autre conique.

Les troisièmes tangentes à une H_3 menées des sommets de tout hexagone circonscrit à cette courbe et à une conique touchent une autre conique. Dans ces deux théorèmes, si trois des tangentes concourent, les autres concourent.

Deux triangles $T(\theta)$ et $T(\pi - \theta)$ sont circonscrits à une conique; réciproquement, trois tangentes communes à une H_3 et à une conique formant un triangle $T(\theta)$, les trois autres forment un triangle $T(\pi - \theta)$; les cercles circonscrits à ces deux triangles sont égaux, leur rayon commun est $2r\sin\theta$.

Les trois tangentes communes à une H_3 et à un cercle osculateur forment un triangle inscrit dans un cercle dont le rayon vaut le quart du rayon du cercle osculateur.

On aurait des théorèmes analogues en considérant des coniques ayant avec l'hypocycloïde un ou plusieurs contacts de divers ordres; on retrouverait en particulier des propriétés des coniques tritangentes.

Les normales à une H_3 aux points où cette courbe est touchée par ses six tangentes communes avec une conique touchent une autre conique; les normales relatives à un triangle $T(\theta)$ et à un triangle $T(\pi-\theta)$ touchent une conique; les normales relatives à ces divers triangles forment des triangles inscrits dans des cercles égaux.

Six tangentes touchant une conique, quatre d'entre elles et les tangentes perpendiculaires aux deux autres touchent aussi une conique.

Nous avons vu que la droite de Miquel de cinq tangentes a_1, a_2, ..., a_5 fait avec $U'U$ un angle ω donné par

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_5 + \omega \equiv 0.$$

Elle est donc *parallèle à la sixième tangente commune à l'hypocycloïde et à la conique tangente aux cinq droites;* nous avons déjà remarqué qu'elle touche aussi cette conique.

Si à quatre tangentes on associe successivement deux tangentes rectangulaires, les droites de Miquel des deux groupes de cinq droites sont rectangulaires et se coupent au foyer de la parabole tangente aux quatre premières tangentes.

Systèmes de coniques : Les coniques tangentes à quatre tangentes fixes d'une H_3 touchent deux autres tangentes dont le point commun décrit une cinquième tangente fixe; une seule de ces coniques est donc tangente á l'hypocycloïde.

Parmi les coniques inscrites à un triangle $T(\theta)$, il

en est une infinité qui sont tangentes à l'hypocycloïde; trois de ces coniques ont avec elle un contact du deuxième ordre, et les tangentes aux points où ces coniques touchent l'hypocycloïde forment un triangle équilatéral circonscrit à une conique inscrite au premier triangle; si celui-ci est un triangle T, les points de contact sont les sommets de l'hypocycloïde.

Parmi les coniques tangentes à deux tangentes fixes a_1, a_2, une infinité touchent l'hypocycloïde en deux points et forment deux familles : pour chaque famille, les tangentes aux deux points de contact se coupent sur une tangente fixe. Ces deux tangentes fixes, b_1 et b_2, sont rectangulaires et également inclinées sur a_1 et a_2. Quatre des coniques ont avec l'hypocycloïde un contact du troisième ordre : les points de contact sont les points où b_1 et b_2 coupent l'hypocycloïde, les tangentes en ces points sont parallèles aux côtés et aux diagonales d'un carré; la conique qui les touche, en même temps que l'une des tangentes données, touche aussi la tangente perpendiculaire à l'autre tangente donnée.

Parmi les coniques tangentes à une tangente à l'hypocycloïde, cinq ont avec cette courbe un contact du quatrième ordre; les tangentes aux points de contact sont parallèles aux côtés d'un pentagone régulier, et la conique qui leur est tangente touche la tangente donnée, etc.

Hypocycloide considérée comme transformée d'un cercle.

44. Des considérations simples montrent que la transformée par points inverses, par rapport à un triangle équilatéral, du cercle inscrit dans ce triangle, est l'hypocycloïde ayant les sommets pour points de rebroussement.

Ce mode de génération permet d'établir commodément certaines propriétés de la courbe, par exemple les suivantes :

Toute conique tangente à une H_3 et passant aux points de rebroussement est une hyperbole dont les asymptotes font un angle $\frac{\pi}{3}$.

Si, par un point de rebroussement A *d'une hypocycloïde, on mène une sécante* Ann', *les deux autres points de rebroussement sont conjugués par rapport aux tangentes en* n *et* n'; le lieu du quatrième point commun aux deux coniques passant aux points de rebroussement, et touchant respectivement l'hypocycloïde en n et n', est une conique.

Des propriétés élémentaires de la parabole on déduit que :

Si un cercle variable passe au foyer d'une parabole et touche cette courbe, la droite qui joint leurs deux autres points communs coupe l'axe de la parabole en un point fixe.

On en conclut que : si une conique fixe Σ est inscrite à un triangle, et qu'une conique variable circonscrite au triangle touche Σ, la sécante commune conjuguée de la tangente au point de contact des coniques passe en un point fixe; ce point est commun aux droites joignant les sommets du triangle aux points où Σ touche les côtés opposés.

En particulier, toute conique, circonscrite à un triangle équilatéral et tangente au cercle inscrit à ce triangle, coupe ce cercle en deux points diamétralement opposés, et réciproquement. Ce théorème conduit au suivant :

Les points de rebroussement d'une H_3, *le centre de la courbe et les extrémités de toute corde tan-*

gente sont six points d'une même conique (BICKART, *Revue de Mathématiques spéciales*, 1908).

Les deux coniques passant aux points de rebroussement et tangentes à l'hypocycloïde aux extrémités d'une corde tangente se coupent sur le cercle des rebroussements.

CORRESPONDANCE.

M. **M. d'Ocagne** : *Au sujet d'un article récent.* — L'intégration effectuée par M. R. Garnier dans le numéro de novembre 1912 des *Nouvelles Annales* (p. 502) repose sur la formule (1) de la page 505, que l'auteur établit de deux manières différentes, l'une et l'autre ingénieuses; mais il me semble que cette relation peut être obtenue par un procédé plus direct que voici :

Supposons menée en M (sur la figure 1 de la page 503) la normale limitée d'autre part à l'axe OA. Une propriété classique de l'ellipse nous apprend que la projection de cette normale n sur le rayon vecteur MF est constante et égale à $\frac{b^2}{a}$. On a donc, en appelant μ l'angle de cette normale avec ce rayon vecteur,

$$n \cos\mu = \frac{b^2}{a}.$$

Mais si ν est l'angle de la normale avec OA, une autre propriété non moins classique $\left(\text{celle qui dit que le pied de la normale sur OA divise OR dans le rapport } \frac{b^2}{a^2}\right)$ donne

$$\frac{a\cos\varphi}{n\cos\nu} = \frac{a^2}{b^2},$$

et la comparaison de ces deux formules montre immédiate-

ment que

$$\cos\nu = \cos\mu \cos\varphi.$$

Or, les arcs infiniment petits $d(\mathrm{M})$ et $d(\mathrm{Q})$, décrits simultanément par les points M et Q, ayant même projection sur OB, on a

$$d(\mathrm{Q})\cos\varphi = d(\mathrm{M})\cos\nu$$

ou

$$b\cos\varphi\, d\varphi \doteq \frac{r\cos\nu\, d\theta}{\cos\mu},$$

et en vertu de la formule ci-dessus

$$b\, d\varphi = r\, d\theta,$$

C. Q. F. D.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2077.

(1907, p. 288.)

Un triangle ABC *étant inscrit à une hyperbole équilatère, si* DEF *est le triangle pédal d'un point quelconque de la courbe, le point inverse du centre de la courbe par rapport au triangle* DEF *est le point à l'infini dans une direction fixe et cette direction est celle de la droite qui est la ligne inverse de la courbe par rapport au triangle* ABC.

(G. Fontené.)

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Nous démontrerons tout d'abord le théorème suivant :

Étant donnée une hyperbole équilatère Σ *circonscrite à un triangle* ABC, *deux points* P *et* P' *de la courbe situés sur une même perpendiculaire a l'un des côtés du triangle* ABC (*au côté* BC *par exemple en un point* E) *les triangles* DEF, DE'F', *podaires des points* P *et* P' *par*

rapport au triangle ABC *sont tels que les angles* FDE, F′DE′ *ont mêmes bissectrices.*

On sait en effet que le triangle podaire d'un point P par rapport au triangle ABC est semblable au triangle antipodaire du point P_1 inverse par rapport à ABC. On déduit immédiatement que les bissectrices de l'angle BP_1C sont parallèles aux bissectrices de l'angle FDE.

Soit Δ la droite inverse de l'hyperbole équilatère Σ par rapport à ABC, il existe sur cette droite une infinité de couples de points M_1 et M'_1 tels que les bissectrices des angles $\widehat{BM_1C}$, $\widehat{BM'_1C}$ soient parallèles, car le lieu des points μ tels que les bissectrices de l'angle $\widehat{B\mu C}$ soient parallèles à une direction donnée est une hyperbole équilatère passant par B et C, ayant pour centre le milieu de BC et pour directions asymptotiques la parallèle et la perpendiculaire à la direction donnée. (C'est le lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction données menées aux coniques de foyers B et C.) Ces points M_1 et M'_1 forment d'ailleurs sur Δ une involution I_1 dont deux couples de points correspondants sont les points d'intersection α et β de Δ avec le cercle ABC, le centre O de ABC et le point O′ d'intersection de Δ avec BC.

D'autre part à deux points P et P′ de Σ situés sur une perpendiculaire à BC, correspondent sur Δ deux points inverses P_1 et P'_1, intersections de Δ avec la conique C inverse de la droite PP′; or toutes les coniques analogues à C sont circonscrites au triangle ABC et passent par le point A′ diamétralement opposé à A sur le cercle ABC.

Elles coupent par conséquent Δ en des points en involution. Deux couples de points de cette involution I sont les points α et β, O et O′.

Les deux involutions I et I_1 coïncident et le théorème est démontré.

Ceci posé, considérons un point P de l'hyperbole Σ; la perpendiculaire abaissée de P sur AB coupe Σ en P'_1, la perpendiculaire abaissée de P′ sur AC coupe Σ en P″, la perpendiculaire abaissée de P″ sur AB coupe Σ en P‴, etc. Les triangles podaires de ces P, P′, P″, ... sont d'après le théorème précédent tels que l'inverse du centre ω de Σ (qui est commun à tous les cercles circonscrits à ces triangles) soit à

l'infini dans la même direction; comme ces points sont en nombre infini sur Σ, cette direction est la même quel que soit le point pris sur Σ pour déterminer un triangle podaire par rapport à ABC.

Reste à déterminer cette direction.

Nous considérons pour cela le triangle podaire de l'orthocentre H du triangle ABC; soient H′ la projection de ce point sur BC, H″ l'intersection de AH avec le cercle ABC, M le quatrième point d'intersection de Σ avec le cercle ABC. Le centre de Σ est le milieu ω de HM et la direction cherchée est la symétrique par rapport à AH de ωH′ ou de MH″. Si $\widehat{BAM} = \theta$, $\widehat{AMH'} = C + \theta$ et l'inverse de AM fait avec AH l'angle

$$H'\widehat{AM'} = \frac{\pi}{2} - (c + \theta).$$

La direction cherchée est par suite *perpendiculaire* à la droite Δ inverse de Σ par rapport à ABC *et non parallèle à cette droite comme le porte l'énoncé.*

Remarque. — La proposition précédente peut encore s'énoncer comme il suit :

Si un triangle ABC *est inscrit dans une hyperbole équilatère* Σ *de centre* ω, *la droite de Simson du point* ω *par rapport au triangle podaire d'un point quelconque de la courbe par rapport au triangle* ABC *est parallèle à une direction fixe et cette direction est celle de l'inverse de* Σ *par rapport à* ABC.

2084.

(1907, p. 327; 1911, p. 183.)

Étant donnés un tétraèdre orthocentrique ABCD *et un point* M *de la sphère circonscrite, les parallèles à* MA, MB, MC, MD *menées par l'orthocentre* H, *rencontrent les plans des faces correspondantes en quatre points situés dans un même plan et ce plan partage le segment* MH *dans le rapport de* 2 *à* 1.

(G. Fontené.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. R. Bouvaist.

Soit M' le point diamétralement opposé à M sur la sphère ABCD, soit Σ la sphère conjuguée au tétraèdre donné. Les droites conjuguées des droites AM', BM', CM', DM' par rapport à la sphère Σ sont les intersections des faces du tétraèdre avec les plans menés par H perpendiculairement à AM'_1, BM'_1, CM'_1, DM'_1, plans qui contiennent les parallèles à AM, BM, CM, DM menées par H; ces droites conjuguées sont dans le plan polaire de M' par rapport à Σ. Soit P l'intersection de ce plan polaire avec MM', on a évidemment

$$HP.HM' = HA.HH_1 = \frac{1}{3}\,HM.HM'$$

(H_1 étant la trace de la hauteur AH sur la face BCD), d'où

$$\frac{HP}{HM} = \frac{1}{3},$$

ce qui démontre la proposition.

2167.

(1910, p. 528.)

Soient dans un plan cinq droites concourant en un point O *et sur chacune d'elles deux points* (A_1, A_2), (B_1, B_2) (C_1, C_2), (D_1, D_2), (E_1, E_2). *On désigne par* C_a *la cubique passant par* O *et les points* B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2 *et par* C_b, C_c, C_d, C_e *les cubiques analogues. La tangente en* O *à* C_a *coupe cette courbe au point* a; *soient* b, c, d, e *les points analogues des cubiques* C_b, C_c, C_d, C_e. *Montrer que :*

1° *Les cinq cubiques considérées ont, en dehors de* O, *deux points communs* P *et* Q.

2° *Les points* a, b, c, d, e *sont sur la droite* PQ.

(Letierce.)

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Soient Σ une quadrique quelconque, Δ une droite coupant Σ en ω et O et S un point de Δ: soient Δ_a, Δ_b, Δ_c, Δ_d, Δ_e cinq

droites passant par S et coupant Σ en a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2. Soit S_a le cône du second ordre passant par Δ, Δ_b, Δ_c, Δ_d, Δ_e, soit σ_a la biquadratique d'intersection de ce cône avec Σ. Si nous prenons ω comme centre de projection, la projection conique de σ_a sur un plan π sera une cubique C_a passant par les points O, B_1 B_2, C_1 C_2, D_1 D_2, E_1 E_2, ces points étant les traces sur le plan π des droites ωO, ωb_1, ωb_2, ωc_1, ωc_2, ωd_1, ωd_2, ωe_1, ωe_2. C_a passera en outre par les traces P et Q sur π des génératrices de Σ payant par ω, et la tangente à C_a en O rencontrera cette cubique au point a, trace sur π de la tangente à σ_a en ω; a est donc sur PQ. Les cônes S_b, S_c, S_d, S_e nous donneront de même les biquadratiques σ_b, σ_c, σ_d, σ_e, dont les projections C_b, C_e, C_d, C_e sur π passeront par P et Q et telles que leurs tangentes en O les couperont sur PQ.

Autres solutions par M. Klug.

2181.

(1911, p. 384.)

Trouver le lieu du centre d'un cercle inscrit à un triangle conjugué à une conique C, *l'un des sommets du triangle variable étant fixe.*

(N. Abramescu.)

SOLUTION

Par M. Thié.

On sait que les cercles inscrits à un triangle conjugué à une hyperbole équilatère ont leurs centres sur cette courbe. Soient alors AMN l'un des triangles considérés, ayant un sommet fixe en A, et P la polaire du point A par rapport à C. Soit encore H l'hyperbole équilatère bitangente à C avec P pour corde de contact. Le triangle AMN est conjugué par rapport à H. On en conclut immédiatement que cette courbe constitue le lieu cherché.

Autres solutions par MM. Bouvaist, L. Klug et Parrod.

2183.

(1911, p. 480.)

Soient N *le point où la normale au point* M *d'une parabole coupe l'axe, et* P *et* Q *les points d'intersection de la*

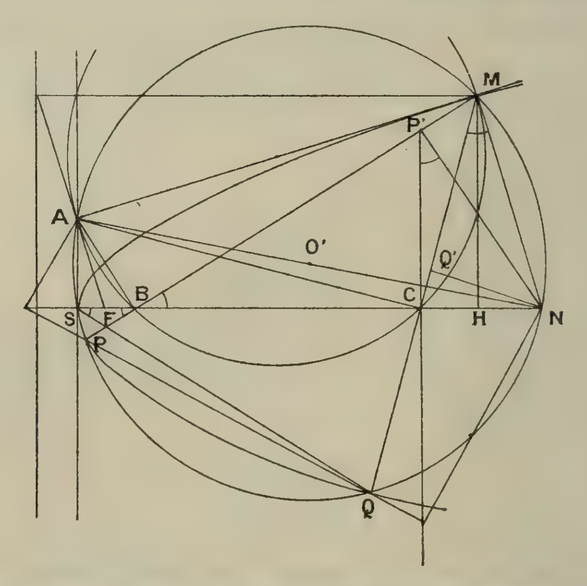
parabole avec le cercle qui passe par M_1N *et le sommet de la parabole.*

Montrer géométriquement que :

1° MP *et* MQ *sont les normales à la parabole en* P *et* Q ;

2° *La droite de Simson de* N, *par rapport au cercle* MPQ, *est l'une des asymptotes de l'hyperbole d'Apollonius de* M, *par rapport à la parabole et par conséquent :*

3° *La droite de Simson* Δ *de* N, *par rapport au cercle* MPQ, *est perpendiculaire à l'axe de la parabole ;*



4° *Le lieu du centre du cercle* MPQ *est une parabole ayant pour sommet le foyer de la parabole donnée ;*

5° *L'enveloppe du cercle* MPQ *est une cubique circulaire ;*

6° *Le lieu du point d'intersection de la tangente en* M *à la parabole avec la droite de Simson de* N *est une cubique* (¹).

(N. Abramescu.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

Rappelons les propriétés suivantes :

Les asymptotes d'une hyperbole équilatère inscrite à un

(¹) Énoncé rectifié.

triangle sont deux droites de Simson dont les points sont diamétralement opposés sur le cercle circonscrit.

Le cercle qui passe par les pieds des normales menées d'un point à une parabole passe par le sommet; il rencontre l'axe en un deuxième point dont l'abscisse est celle du point considéré augmentée du paramètre p.

Les hyperboles d'Apollonius d'une parabole ont pour asymptote l'axe de la parabole, l'abscisse de l'autre asymptote est celle du point considéré diminuée du paramètre p.

1°, 2°, 3° Considérons l'hyperbole d'Apollonius, définissant les points P et Q, relative au point M de la parabole, le cercle MPQ passe par le sommet S, il rencontre l'axe en N et d'après ce qui précède MN est la normale en M.

L'axe est la droite de Simson d'un point A, du cercle MPQ, situé sur la tangente au sommet. Cette propriété est bien connue et d'ailleurs c'est une conséquence de la suite.

Abaissons les perpendiculaires NP′, NQ′ sur les normales MP, MQ; le quadrilatère MNP′Q′ est inscriptible, les angles NMQ′, NP′Q′, NSQ sont égaux; MP rencontre l'axe en B, les angles BSQ, SBP sont égaux puisque les deux sécantes communes sont également inclinées sur l'axe; en résumé les angles NP′Q′, P′NB sont complémentaires, P′Q′ est perpendiculaire sur l'axe, donc la droite de Simson du point N est la deuxième asymptote.

Les points A et N sont donc diamétralement opposés dans le cercle MSPQ.

L'angle NSH est alors droit, le point A est sur la tangente au sommet.

L'angle AMN étant droit, le point A est aussi sur la tangente en M à la parabole.

4° Les coordonnées du point M étant (x, y), celles du centre O du cercle MPQ, c'est-à-dire du milieu de AN, sont $\left(\frac{x+p}{2}, \frac{y}{4}\right)$, et l'équation du lieu du point O est

$$16y^2 = 2p(2x - p),$$

parabole ayant pour sommet le foyer de la parabole donnée.

5° Le cercle MPQ passant par un point fixe S, le point de contact de ce cercle avec son enveloppe est sur la perpendiculaire abaissée de ce point S sur la tangente en O′ au lieu de O′, c'est-à-dire sur la parabole précédente.

Pour que l'enveloppe fût une strophoïde il faudrait que le point S fût sur la directrice de la parabole lieu de O', ce qui n'est pas; le lieu est une cubique dont le point S est un point double et dont le sommet est le point d'abscisse p.

6° Les coordonnées du point M étant x_0, y_0 les équations des deux droites sont

$$2px - 2y_0 y + y_0^2 = 0, \quad 2px = y_0^2 - 2p^2;$$

d'où

$$p(2x+p)^2 = 2y^2(x+p),$$

cubique ayant pour asymptote $x + p = 0$; cette droite est à la distance $\frac{-p}{2}$ de la directrice.

L'origine nouvelle est un point double.

La courbe est asymptotique à la parabole donnée.

Remarques. — Si d'un point quelconque M on mène les normales MP, MQ, MR à une parabole de sommet S, et si du point M on abaisse les perpendiculaires MH et MK sur l'axe et la tangeute au sommet, le cercle PQRS passe par le milieu de SK et rencontre l'axe en un point N tel que $HN = +p$; d'où sa construction.

Le point M étant sur la parabole, la tangente en M rencontre la tangente en S au point A, le cercle PQMS passe par le point A et le pied de la normale MN sur l'axe; le cercle de diamètre AM rencontre l'axe aux points B, C tels que MB et MC sont les normales MP, MQ.

Autres solutions de MM. E.-N. Barisien, Bouvaist, L. Klug, J. Lemaire. Le premier de ces correspondants ajoute la remarque suivante : *La normale en* M *à la parabole et les droites de Simson du point* N *se rencontrent au point* N' *symétrique de* N *par rapport à* M; *le lieu de* N' *est donc une parabole.*

[L¹5a]

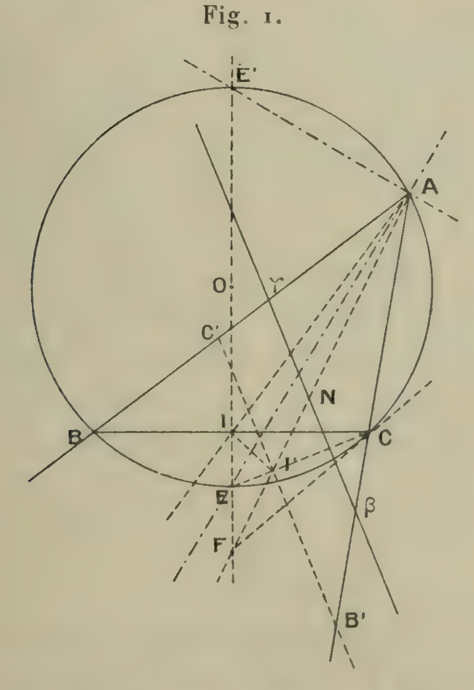
SUR LE POINT DE FRÉGIER DANS L'HYPERBOLE;

Par M. P. MAGRON,
Professeur au Lycée de Troyes.

Théorème. — *Étant donnée une hyperbole* (H) *d'asymptotes* AB, AC *passant en* I, *où elle admet pour tangente* BC, *le point de Frégier relatif à* I *est le pôle de* BC *par rapport au cercle* ABC.

En effet, le point F est sur la perpendiculaire à BC en son milieu I (*fig.* 1) et sur la droite symétrique

Fig. 1.



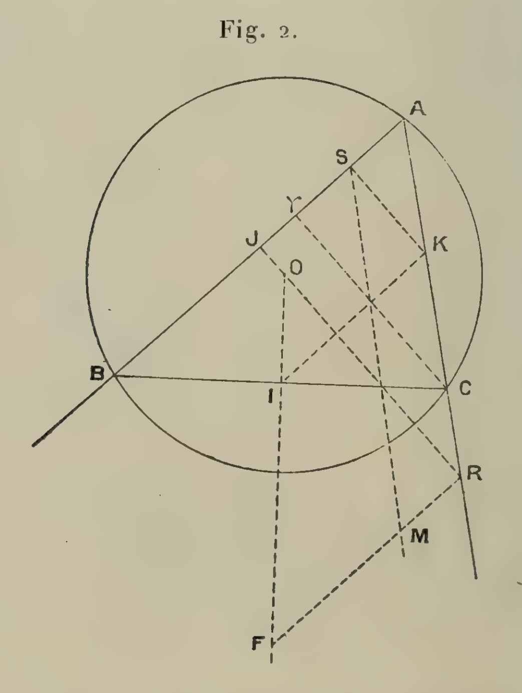
de AI par rapport à l'axe AE, ce qui correspond au point I′ de (H) symétrique de I par rapport à AE. Comme IF passe par le centre O du cercle ABC et

que AE est bissectrice de $\widehat{IAF}$, F, E, I, E′ sont conjugués et BC est bien la polaire de F dans le cercle circonscrit au triangle ABC.

Théorème. — *Si* β *et* γ *sont les pieds des hauteurs relatives à* B *et* C *dans le triangle* ABC, *la droite* βγ *est la polaire du point de Frégier par rapport à l'hyperbole* (H).

Nous allons montrer que la polaire de γ qui est parallèle à AB coupe OI en un point F qui est le point de Frégier relatif à I. Soient J et K (*fig.* 2) les milieux

Fig. 2.



de AB et AC, la tangente autre que l'asymptote menée de γ est telle que, si M est le point de contact et si l'on mène MR et MS parallèles à AB et à AC, on ait en ASK et AJR deux triangles semblables; KS étant parallèle à Cγ, JR l'est aussi et R est donc sur la perpendiculaire

élevée à AB en son milieu J. On a alors

$$\widehat{JRB} = \widehat{JRA} = \frac{\pi}{2} - A$$

et aussi

$$\widehat{B} = \frac{\pi}{2} - A.$$

Par conséquent, le cercle construit sur OF comme diamètre qui passe en R puisque $\widehat{ORF}$ est droit, passe aussi par B et C et FC est perpendiculaire à OC; donc, F est le pôle de BC dans le cercle ABC. C'est, par suite, le point de Frégier de I. De même, la polaire de β passe par F, donc, βγ est la polaire de F par rapport à l'hyperbole (H).

Remarque. — On voyait immédiatement que la polaire était parallèle à βγ, car elle est parallèle à la tangente en I′ (*fig.* 1), puisque AF et cette direction sont conjuguées; or, la tangente en I′ est antiparallèle à BC, donc parallèle à βγ.

Théorème. — *Quand* I *décrit l'hyperbole* (H), F *décrit une hyperbole* (F) *ayant même centre et mêmes asymptotes que* (H), *donc homothétique de* (H), *avec* A *pour centre d'homothétie.*

En effet, on a

(1) $$EI = CE \cos \widehat{IEC}$$

et dans le triangle ECF

(2) $$\frac{CE}{\sin \widehat{IFC}} = \frac{EF}{\sin \widehat{ECF}};$$

or on voit que

$$\left\{\begin{array}{l}\widehat{\text{IEC}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\text{A}}{2}\\ \widehat{\text{IFC}} = \frac{\pi}{2} - \text{A}\\ \widehat{\text{ECF}} = \frac{\text{A}}{2}\end{array}\right.$$

en comparant (1) et (2), il vient alors :

$$(3) \qquad \frac{\text{AI}}{\text{AF}} = \frac{\text{EI}}{\text{EF}} = \cos \text{A},$$

ce qui prouve bien le théorème énoncé, car

$$\frac{\text{AI}'}{\text{AF}} = \cos \text{A}.$$

Remarques. — I. Traçons la tangente en I′ à l'hyperbole (H), elle coupe les asymptotes en B′ et C′ (*fig.* 1). AI′ coupe $\beta\gamma$ en N tel que

$$(4) \qquad \frac{\text{AN}}{\text{AI}'} = \frac{\text{A}\beta}{\text{AB}'} = \frac{\text{A}\beta}{\text{AB}} = \cos \text{A},$$

donc N décrit aussi une hyperbole (N) homothétique de (H) avec A pour centre d'homothétie, et (N) et (F) sont les transformées par polaires réciproques par rapport à (H); si l'existence de l'une est démontrée, l'existence de l'autre s'en déduit.

II. De (3) et (4) on déduit

$$\overline{\text{AI}'}^2 = \overline{\text{AH}} . \overline{\text{AJ}},$$

ce qui prouve que N est, sur $\beta\gamma$, conjugué de F par rapport à (H). D'après la remarque du second théorème, on peut immédiatement conclure que $\beta\gamma$ est la polaire de F par rapport à (H).

III. Cette propriété est vraie pour les trois coniques;

dans le cas de la parabole, on obtient une parabole égale à la première qui a subi une translation égale à $2p$, p étant le paramètre, car

$$I'F = 2MN = 2p,$$

en conservant pour I' et F les notations de plus haut, et en désignant par MN la sous-normale relative à I.

[M¹3]

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE LAGUERRE;

Par M. G. VALIRON.

Dans une Note *Sur les courbes planes algébriques* (*Comptes rendus*, 1865), Laguerre a énoncé quelques remarquables théorèmes, qu'il a appliqués dans diverses autres Notes (voir *Œuvres*, t. II, p. 23, 64, 178, 480, 537). Je me propose de donner ici une démonstration simple de certains de ces théorèmes.

Si x et y sont les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point M, les nombres complexes $z = x + iy$, $z' = x - iy$, sont les coordonnées isotropes de ce point. O étant l'origine des coordonnées, α, l'un des angles de la droite OM avec Ox, on a

$$OM = \sqrt{|zz'|},$$

$$\alpha = \frac{1}{2} A\left(\frac{z}{z'}\right) + \frac{1}{2i} L\left|\frac{z}{z'}\right|,$$

en désignant par $A(u)$ l'argument du nombre u. La deuxième égalité définit α à π près. Étant donnés deux points $M_1(z_1, z'_1)$, $M_2(z_2, z'_2)$, imaginaires conjugués,

les nombres z_2 et z'_2 sont respectivement imaginaires conjugués de z'_1 et z_1, donc

$$OM_1\,OM_2 = \left|\sqrt{z_1 z'_2 z_2 z'_2}\right| = |z_1 z_2|,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{2}\,A\left(\frac{z_1}{z'_1}\,\frac{z_2}{z'_2}\right) = A(z_1 z_2).$$

Étant donnés p points $M_1, M_2, \ldots, M_p$, Laguerre appelle *orientation du faisceau* $OM_1, OM_2, \ldots, OM_p$ la somme (définie à π près) des angles de ces directions avec Ox; si à toute direction OM_q correspond la direction imaginaire conjuguée, l'orientation A du faisceau est, en désignant par z_q, z'_q les coordonnées de M_q,

$$A = \sum_{q=1}^{q=p} \alpha_p = A(z_1, z_2, \ldots, z_p) = \frac{1}{2}\,A\left(\frac{z_1}{z'_1}\,\frac{z_2}{z'_2}\cdots\frac{z_p}{z'_p}\right).$$

L'orientation de p droites est définie en menant par l'origine des parallèles à ces droites, donc à π près.

Laguerre introduit encore la notion de *centre harmonique de n points par rapport à un point* P : si $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sont les n points donnés, on prend les inverses de ces points par rapport à un cercle arbitraire de centre P, on forme la somme géométrique des vecteurs qui ont pour origine P et extrémité ces n points inverses, on divise ce vecteur-somme par n et l'on prend l'inverse de l'extrémité obtenue par rapport au cercle considéré; on obtient ainsi le centre harmonique de $M_1, \ldots, M_n$ par rapport à P. Si z_q, z'_q sont les coordonnées de M_q, z, z' celles du point P, et Z, Z' celles du centre harmonique, on a

$$(1)\qquad \frac{n}{Z - z} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{z_q - z}$$

et l'égalité analogue. Ceci montre, en particulier, que

lorsque P s'éloigne indéfiniment, le centre harmonique tend vers le centre des moyennes distances.

Supposons que, par chaque point M_q, on mène la perpendiculaire à la droite PM_q, et qu'on prenne la première polaire du point P par rapport à l'ensemble de ces droites : *cette polaire est la perpendiculaire menée par le centre harmonique à la droite joignant ce point au point* P. En effet, en prenant P pour origine, la perpendiculaire à PM_q menée par M_q a pour équation

$$(2) \qquad \frac{z}{z_q} + \frac{z'}{z'_q} - 2 = 0$$

et la polaire de P par rapport à l'ensemble de ces droites s'obtient en faisant la somme des équations telles que (2), son équation est donc

$$z\sum_1^n \frac{1}{z_q} + z'\sum_1^n \frac{1}{z'_q} - 2n = 0;$$

en considérant la relation (1), on voit que la proposition est démontrée.

Si $f(x, y, 1) = 0$ est l'équation à coefficients réels d'une courbe en coordonnées cartésiennes, son équation en coordonnées isotropes, est

$$f\left(\frac{z+z'}{2}, \frac{z-z'}{2i}, 1\right) \equiv F(z, z', 1) = 0.$$

Si la courbe est p fois circulaire, son degré étant n, les termes de plus haut degré dans f et F sont de la forme

$$(x^2+y^2)^p \varphi_{n-2p}(x, y) \equiv (zz')^p \Phi_{n-2p}(z, z').$$

Laguerre appelle *puissance du point* P (x_0, y_0), (z_0, z'_0),

par rapport à cette courbe, le nombre

$$(3)\qquad \left|\frac{f(x_0, y_0, 1)}{\varphi_{n-2p}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2i}\right)}\right| = \left|\frac{F(z_0, z'_0, 1)}{\Phi_{n-2p}(1, 0)}\right|;$$

dans le cas où $p = 0$, on a simplement

$$\left|\frac{f(x_0, y_0, 1)}{f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2i}, 0\right)}\right| = \left|\frac{F(z_0, z'_0, 1)}{F(1, 0, 0)}\right|.$$

Ces définitions étant données, on a les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Étant donnés un point* P *et une courbe algébrique de degré n coupant p fois la droite de l'infini aux points cycliques, un cercle passant par* P *coupe la courbe en* $2n - 2p$ *points à distance finie; le produit des distances du point* P *à ces points, multiplié par le produit des distances du centre du cercle aux p foyers singuliers, est égal à la puissance du point* P, *multipliée par la* $(n-p)^{ième}$ *puissance du rayon du cercle.*

En effet, on peut prendre P pour origine, ce qui ne change pas l'expression de la puissance; soit alors

$$(4)\quad \begin{aligned} F(z, z', 1) \equiv (z, z')^p \Phi_{n-2p}(z, z') \\ + (z, z')^{p-1}\Phi_{n-2p+1}(z, z') + \ldots \\ + \Phi_{n-p}(z, z') + \ldots + \Phi_0 = 0. \end{aligned}$$

La puissance de l'origine est

$$\left|\frac{\Phi_0}{\Phi_{n-2p}(1, 0)}\right|.$$

Considérons un cercle passant par l'origine, soit

$$(5)\qquad zz' - zz'_0 - z'z_0 = 0;$$

z_0 et z'_0 sont les coordonnées du centre, le rayon est donc $r = |z_0| = |z'_0|$. L'équation aux z de l'intersection des courbes (4) et (5) est

$$(6)\quad (z^2 z'_0)^p \Phi_{n-2p}[z(z-z_0), zz'_0] + \ldots \\ + \Phi_{n-p}[z(z-z_0), zz'_0] + \ldots + (z-z_0)^{n-p}\Phi_0 = 0.$$

Comme la courbe (4) et le cercle (5) ont des équations cartésiennes réelles, les points communs sont deux à deux imaginaires conjugués, et le produit des distances de ces points à l'origine est le module du produit des racines de l'équation (6), donc

$$\left| \frac{\Phi_0 \, z_0^{n-p}}{z_0'^p \Phi_{n-2p}(1,0) + \ldots + \Phi_{n-p}(1,0)} \right|,$$

ou encore

$$(7)\quad \left| \frac{\Phi_0}{\Phi_{n-2p}(1,0)} \right| r^{n-p} : \left| \frac{z_0'^p \Phi_{n-2p}(1,0) + \ldots + \Phi_{n-p}(1,0)}{\Phi_{n-2p}(1,0)} \right|.$$

Les foyers singuliers sont les points réels dont les coordonnées z' vérifient l'équation

$$(8)\quad z'^p \Phi_{n-2p}(1,0) + z'^{p-1}\Phi_{n-2p+1}(1,0) + \ldots + \Phi_{n-p}(1,0) = 0,$$

l'expression qui est en dénominateur dans l'expression (7) représente donc le produit des distances du point z_0, z'_0, c'est-à-dire du centre du cercle considéré, aux p foyers singuliers; et la proposition est démontrée.

Si, au lieu de considérer un cercle, on considère une droite passant par le point P, on obtient la proposition suivante, qui peut aussi s'obtenir comme cas limite du théorème I :

Le produit des distances du point P *aux* n *points où une droite* D *passant par* P *coupe une courbe* p *fois circulaire, multiplié par le produit des doubles*

des sinus des angles de P *avec les asymptotes non isotropes, est égal à la puissance de* P.

On en déduit le théorème de Newton.

Si, en même temps que l'équation (6), on considère l'équation en z' formée de la même façon, on obtient l'orientation Λ du faisceau joignant P aux $2n-2p$ points communs en prenant la moitié de l'argument du quotient des produits des racines, donc

$$\begin{aligned} \Lambda = & \ \frac{1}{2} \mathrm{A} \left[\frac{z_0^{n-p}}{z_0'^{n-p}} \ \frac{z_0^p \Phi_{n-2p}(0, 1) + \ldots + \Phi_{n-p}(0, 1)}{z_0'^p \Phi_{n-2p}(1, 0) + \ldots + \Phi_{n-p}(1, 0)} \right] \\ = & \ \frac{1}{2} \mathrm{A} \left[(-1)^n \frac{\Phi_{n-2p}(0, 1)}{\Phi_{n-2p}(1, 0)} \right] \\ & + \frac{1}{2} \mathrm{A} \left[\frac{\dfrac{z_0^p \Phi_{n-2p}(0, 1) + \ldots + \Psi_{n-p}(0, 1)}{\Phi_{n-2p}(0, 1)}}{\dfrac{z_0'^p \Phi_{n-2p}(1, 0) + \ldots + \Phi_{n-p}(1, 0)}{\Phi_{n-2p}(1, 0)}} \right] \\ & + \frac{1}{2} \mathrm{A} \left[\left(\frac{z_0}{z_0'} \right)^{n-p} (-1)^n \right]; \end{aligned}$$

comme le faisceau des directions asymptotiques non isotropes est

$$\Phi_{n-2p}(z, z') = 0,$$

le premier terme du troisième membre de l'égalité précédente représente l'orientation de ce faisceau ; d'après l'équation (8) et l'équation analogue qui donne les z des foyers singuliers, le deuxième terme représente l'orientation du faisceau des droites joignant le point P aux foyers singuliers ; enfin le dernier terme est nul $\left(\text{à } \frac{p\pi}{2} \text{ près}\right)$, si le centre du cercle est sur Oy ; on a ainsi la proposition suivante :

La somme des angles que font les droites joignant un point P *aux points où un cercle passant par* P *coupe une courbe algébrique, avec la tangente au*

point P *à ce cercle, est égale* $\left(\text{à } \frac{p\pi}{2} \text{ près}\right)$ *à la somme des angles que font avec cette même tangente les directions asymptotiques non isotropes, et les droites joignant* P *aux p foyers singuliers.*

Il est évident que, sous cette dernière forme, la proposition est encore vraie lorsque le point P est sur la courbe.

Théorème II. — *Un cercle étant tracé dans le plan d'une courbe algébrique, la somme des angles que font, avec une direction fixe, les rayons aboutissant aux points d'intersection à distance finie, est égale au double de la somme des angles que font, avec cette direction, les directions asymptotiques, augmentée (s'il y a lieu) de la double somme des angles que font avec cette direction les droites joignant le centre du cercle aux foyers singuliers.*

Cette proposition est une conséquence immédiate de la précédente. La démonstration directe se fait aussi très facilement, l'équation de la courbe étant toujours l'équation (4), et le cercle ayant pour équation

$$zz' = r^2, \tag{9}$$

l'équation aux z de l'intersection est

$$\Phi_{n-p}(z^2, r^2) + \dots \\ + z^p r^{2p} \Phi_{n-2p}(z^2, r^2) + \dots + z^{n-p}\Phi_0 = 0, \tag{10}$$

le produit des racines est donc

$$\frac{\Phi_{n-p}(0, 1)}{\Phi_{n-p}(1, 0)} r^{2n-2p},$$

l'orientation Λ_1 du faisceau des droites joignant le centre du cercle (l'origine) aux points communs des

deux courbes est, par suite, donné par

$$\Lambda_I = A\left[\frac{\Phi_{n-p}(0, 1)}{\Phi_{n-p}(1, 0)}\right];$$

d'autre part, d'après ce qui précède, l'orientation du faisceau des directions asymptotiques non isotropes est

$$\Lambda_A = \frac{1}{2} A\left[\frac{\Phi_{n-2p}(0, 1)}{\Phi_{n-2p}(1, 0)}\right] + \frac{n\pi}{2},$$

et celle du faisceau des droites joignant l'origine aux foyers singuliers

$$\Lambda_F = \frac{1}{2} A\left[\frac{\Phi_{n-p}(0, 1)}{\Phi_{n-2p}(0, 1)} : \frac{\Phi_{n-p}(1, 0)}{\Phi_{n-2p}(1, 0)}\right],$$

par suite

$$\Lambda_I = 2\,\Lambda_A + 2\,\Lambda_F,$$

la proposition est donc démontrée. Elle peut d'ailleurs être précisée comme l'a montré Laguerre : à chaque point d'intersection de la courbe et du cercle on peut en faire correspondre un autre qui sera le point imaginaire conjugué, si le point considéré est imaginaire; les points communs sont alors sur $n - p$ droites réelles, et l'orientation des perpendiculaires abaissées du centre sur ces droites est, à π près,

$$\frac{1}{2}\Lambda_I = \frac{1}{2} A\left(\frac{\Phi_{n-p}(0, 1)}{\Phi_{n-p}(1, 0)}\right);$$

on a donc la proposition précisée :

Si l'on considère $n - p$ droites réelles contenant les points d'intersection de la courbe de degré n avec un cercle, l'orientation des rayons perpendiculaires à ces droites est égale, à $\frac{n\pi}{2}$ près, à l'orientation du système des directions asymptotiques et

des droites joignant le centre aux p foyers singuliers.

Considérons maintenant les normales aux points communs à distance finie de la courbe et du cercle, si $M_q(z_q, z'_q)$ est l'un de ces points, la normale a pour équation

$$z\frac{F'_{z_q}}{z_q F'_{z_q} - z'_q F'_{z'_q}} - z'\frac{F'_{z'_q}}{z_q F'_{z_q} - z'_q F'_{z'_q}} - 1 = 0,$$

la polaire harmonique du point P (l'origine), par rapport à ces normales est donc

$$\begin{aligned}(11)\qquad & z\sum_{q=1}^{q=2n-2p}\frac{F'_{z_q}}{z_q F'_{z_q} - z'_q F'_{z'_q}}\\ & - z'\sum_{q=1}^{q=2n-2p}\frac{F'_{z'_q}}{z_q F'_{z_q} - z'_q F'_{z'_q}} - (2n-2p) = 0;\end{aligned}$$

les nombres z_q sont les racines de l'équation (10) et l'on a $z'_q = \frac{r^2}{z_q}$; si l'on désigne par $G(z)$ le premier membre de l'équation (10)

$$G(z) = z^{n-p} F\left(z, \frac{r^2}{z}, 1\right),$$

on obtient

$$z_q F'_{z_q} - z'_q F'_{z'_q} = \frac{1}{z_q^{n-p-1}} G'(z_q),$$

et en posant

$$G_1(z) = z^{n-p} F'_z\left(z, \frac{r^2}{z}, 1\right),$$

on voit que le coefficient de z dans l'équation (11) est

$$\sum_{q=1}^{q=2n-2p}\frac{G_1(z_q)}{z_q G'(z_q)} = -\frac{G_1(0)}{G(0)} = -\frac{\Phi_{n-p-1}(0, 1)}{\Phi_{n-p}(0, 1)},$$

(et égal à *zéro* pour $p = 0$). De même le coefficient

de z' est égal à

$$\frac{\Phi_{n-p-1}(1, 0)}{\Phi_{n-p}(1, 0)}.$$

Par suite la droite (11) est à l'infini, s'il n'y a pas de foyers singuliers; si la courbe passe par les points cycliques, elle s'écrit

$$z\frac{\Phi_{n-p-1}(0, 1)}{\Phi_{n-p}(0, 1)} + z'\frac{\Phi_{n-p-1}(1, 0)}{\Phi_{n-p}(1, 0)} + (2n - 2p) = 0;$$

en se reportant à l'équation (8), on voit que les coefficients de z et z' sont les sommes changées de signe des inverses des coordonnées des foyers singuliers; on a donc le théorème suivant de Liouville :

La polaire harmonique par rapport au centre d'un cercle des normales à une courbe aux points d'intersection de ce cercle et de la courbe est la droite de l'infini lorsque la courbe n'est pas circulaire; si la courbe est p fois circulaire et de degré n, cette polaire coïncide avec la droite obtenue en prenant l'homothétique dans le rapport $\frac{n-p}{p}$ *de la polaire des droites menées par chaque foyer singulier perpendiculairement à la droite joignant ce foyer au centre du cercle* [1].

Théorème III. — *L'orientation des tangentes menées d'un point à une courbe algébrique égale l'orientation des droites joignant ce point aux foyers réels* [2].

---

(1) Ce théorème est appliqué par Laguerre à l'étude des normales issues d'un point à une conique (*Œuvres*, 2, p. 456).

(2) Ce théorème a été énoncé avant Laguerre par Siebeck, *Journal de Crelle*, 1864, p. 175.

Nous prendrons encore le point P pour origine, et nous considérerons l'équation tangentielle de la courbe en coordonnées isotropes

$$G(u, v, w) = 0.$$

Nous poserons

$$G(u, v, w) \equiv g_n(u, v) + w g_{n-1}(u, v) + \ldots + w^p g_{n-p}(u, v) = 0,$$

les tangentes menées par l'origine ont pour équation

$$(12) \qquad \frac{z}{z'} = t,$$

où t est racine de l'équation

$$(13) \qquad G(1, -t, 0) \equiv g_n(1, -t) = 0;$$

l'orientation de ces tangentes est donc, en supposant toujours que l'équation cartésienne de la courbe est réelle

$$\Lambda_T = \frac{1}{2} \Lambda \left[\frac{g_n(1, 0)}{g_n(0, 1)} \right].$$

D'autre part, les foyers réels sont les points réels tels que les droites isotropes passant par ces points sont tangentes à la courbe, leurs coordonnées vérifient donc les équations

$$(14) \quad \begin{cases} G(1, 0, -z) \equiv g_n(1, 0) + \ldots + z^p (-1)^p g_{n-p}(1, 0) = 0, \\ G(0, 1, -z') \equiv g_n(0, 1) + \ldots + z'^p (-1)^p g_{n-p}(0, 1) = 0' \end{cases}$$

et les foyers à l'infini correspondent à

$$(15) \qquad g_{n-p}(z', -z) = 0.$$

L'orientation Λ_f du faisceau des droites joignant l'origine à *tous* les foyers est donc

$$\Lambda_f = \frac{1}{2} \Lambda \left[\frac{g_n(1, 0)}{g_{n-p}(1, 0)} : \frac{g_n(0, 1)}{g_{n-p}(0, 1)} \right] + \frac{1}{2} \Lambda \left[\frac{g_{n-p}(1, 0)}{g_{n-p}(0, 1)} \right]$$
$$= \frac{1}{2} \Lambda \left[\frac{g_n(1, 0)}{g_n(0, 1)} \right] = \Lambda_T,$$

ce qui démontre la proposition.

Nous allons montrer maintenant que la somme des inverses des coordonnées des foyers réels est égale à la somme correspondante formée avec les coordonnées des points de contact. Soient z_q, z'_q les coordonnées du point de contact M_q; ζ_q, ζ'_q celles du foyer F_q; d'après les équations (14), on a

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_1^n \frac{1}{\zeta_q} &= \frac{g_{n-1}(1, 0)}{g_n(1, 0)}, \\ \sum_1^n \frac{1}{\zeta'_q} &= \frac{g_{n-1}(0, 1)}{g_n(0, 1)}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, si t_q est la racine de l'équation (13) donnant le point M_q, les coordonnées de ce point sont

$$z_q = \frac{\dfrac{\partial g_n}{\partial u}(1, -t_q)}{g_{n-1}(1, -t_q)}, \qquad z'_q = \frac{\dfrac{\partial g_n}{\partial v}(1, -t_q)}{g_{n-1}(1, -t_q)};$$

or, d'après l'identité bien connue de la décomposition des fractions rationnelles, on a

$$(17)\quad \begin{aligned} \frac{g_{n-1}(u, v)}{g_n(u, v)} &= \sum_1^n \frac{g_{n-1}(1, -t_q)}{\dfrac{\partial g_n}{\partial u}(1, -t_q)} \frac{t_q}{ut_q + v} \\ &= \sum_1^n \frac{g_{n-1}(1, -t_q)}{\dfrac{\partial g_n}{\partial v}(1, -t_q)} \frac{1}{ut_q + v}; \end{aligned}$$

et en faisant soit $u = 1, v = 0$, soit $u = 0, v = 1$, on obtient

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_1^n \frac{1}{z_q} &= \frac{g_{n-1}(1, 0)}{g_n(1, 0)} = \sum_1^n \frac{1}{\zeta_q}, \\ \sum_1^n \frac{1}{z'_q} &= \frac{g_{n-1}(0, 1)}{g_n(0, 1)} = \sum_1^n \frac{1}{\zeta'_q}. \end{aligned} \right.$$

Ce sont les égalités signalées. D'après ce qui a été vu au début, elles s'interprètent comme il suit :

Le centre harmonique relativement à un point P *des points de contact des tangentes menées par ce point à une courbe algébrique coïncide avec celui des foyers réels.*

Ou encore :

La polaire harmonique d'un point P *par rapport aux normales menées à une courbe aux points de contact des tangentes issues de* P *coïncide avec la polaire de* P *relative aux droites menées par chaque foyer réel, perpendiculairement à la droite joignant ce foyer au point* P.

Dans ces énoncés les foyers à l'infini interviennent; on peut ne pas en tenir compte en prenant dans le premier théorème, par exemple, le point homothétique du centre harmonique des foyers à distance finie dans le rapport $\frac{n}{p}$, le point P étant le centre d'homothétie.

Lorsque le point P tend vers un point Q de la courbe, deux des normales tendent vers la normale en Q, et le centre harmonique correspondant a pour limite le centre harmonique de Q par rapport aux foyers de la parabole osculatrice en Q; on obtient ainsi une construction de cette parabole, lorsque l'on connaît les tangentes menées par Q.

Si le point P s'éloigne indéfiniment, et que la courbe ne soit pas tangente à la droite de l'infini, on voit que : *le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes parallèles à une droite coïncide avec celui des foyers réels*. C'est un théorème de Chasles.

Supposons encore que P soit à l'infini, et que la courbe soit tangente à la droite de l'infini, tous les points de contacts étant de rebroussement, alors on a

$$g_{n-p+1}(u, v) \equiv g_{n-p}(u, v)(\alpha u + \beta v),$$

et l'on voit bien aisément que la proposition précédente est encore vraie : *le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes parallèles à une droite coïncide avec le centre des moyennes distances des foyers réels à distance finie.* En appliquant ces deux propositions à une courbe et à sa développée, on voit que : *le centre des moyennes distances des points d'incidence des normales à une courbe algébrique parallèle à une même droite, coïncide avec le centre des moyennes distances des centres de courbure.* Cette proposition due à Duhamel montre encore que la somme algébrique des rayons de courbure aux points d'incidence considérés est nulle, ou encore que, lorsque le système des tangentes parallèles à une droite tourne, la somme algébrique des arcs parcourus par les points de contact est nulle [1].

Lorsque la courbe est tangente à la droite de l'infini aux points cycliques, le théorème III doit être modifié de la façon suivante : la différence entre l'orientation des tangentes menées par P et l'orientation des droites joignant P aux foyers à distance finie est constante; on le voit immédiatement en remarquant que les foyers à l'infini doivent être remplacés par les points à l'infini dans les directions définies par l'équation

$$g_{n-p+q}(z', z) = 0,$$

---

[1] Ces propositions sont déduites (en sens inverse), par Duhamel, d'une égalité de Liouville : LIOUVILLE, *Mémoire sur la théorie de l'élimination* (*Journal de Mathématiques*, t. I, p. 6, 1841, n° 19).

$g_{n-p+q}(u, v)$ étant le premier des polynomes $g_i(u, v)$ qui ne s'annule pas pour $u = 0$, $v = 0$.

Les deux énoncés relatifs aux centres ou polaires harmoniques subsistent évidemment. Enfin, dans le théorème de Duhamel nous avons supposé que la courbe n'est pas tangente à la droite de l'infini.

[O[1]7a]

SUR UNE CONGRUENCE DE DROITES ASSOCIÉE AU RÉSEAU CONJUGUÉ D'UNE SURFACE, ORTHOGONAL EN PROJECTION SUR UN PLAN;

Par M. Émile TURRIERE.

1. Pour les personnes qui s'occupent de Géométrie, il y a certainement grand intérêt à étudier les diverses questions que Ribaucour a proposées dans les *Nouvelles Annales* et autres Recueils : elles donnent lieu à des remarques parfois importantes. Ainsi, bien que les questions 975 et 1053 des *Nouvelles Annales* paraissent de prime abord tout à fait différentes l'une de l'autre, j'ai pu établir entre elles une corrélation remarquable, qui mérite d'être signalée.

Je rappelle les énoncés de ces deux questions :

Question 975. (*Nouvelles Annales*, 1869, p. 563) : *Étant donnés une surface du second ordre et un plan quelconque, trouver sur cette surface un réseau conjugué se projetant sur le plan donné suivant un réseau orthogonal.*

Question 1053. (*Nouvelles Annales*, 1871, p. 558) :

Trouver une surface (M) *telle qu'en abaissant d'un point* M *de* (M) *une perpendiculaire* MP *sur un plan* (P) *et en menant par* P *une parallèle* PN *à la normale en* M *à* (M), *les droites ainsi obtenues soient normales à une surface.*

Je me suis déjà occupé de la question 975 dans deux récents articles, publiés l'un dans le *Bulletin de la Société mathématique* (t. XL, 1912, p. 228-238) et l'autre dans les *Nouvelles Annales* (4e série, t. XII, août 1912).

2. Soient trois axes coordonnés rectangulaires $O(x\,y\,z)$; l'axe Oz est supposé vertical. Étant donnée une surface réelle (S), qui n'est pas un cylindre vertical, soit M un quelconque de ses points, de coordonnées x, y, z; soient p, q, r, s, t les dérivées des deux premiers ordres de la cote z par rapport à x et à y; soit m la projection de M sur le plan horizontal Oxy. Par ce point m je mène la droite d d'équations

$$X = x - pZ,$$
$$Y = y - qZ;$$

cette droite est la parallèle à la normale à la surface au point M.

Les droites d constituent une congruence (Γ) associée à la surface (S).

L'équation différentielle qui définit les séries développables de cette congruence (Γ) est

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy},$$

ou

$$s(dy^2 - dx^2) + (r - t)\,dx\,dy = 0;$$

cette équation différentielle définit sur la surface (S) un

réseau de courbes que j'ai étudiées dans les deux articles cités plus haut. J'ai établi que, sur toute surface (S) qui n'est pas un paraboloïde de révolution d'axe vertical, il existe un réseau réel formé par des courbes (C) qui sont conjuguées sur la surface (S) et qui se projettent horizontalement suivant un réseau orthogonal ; l'équation différentielle de ce réseau (C) est précisément l'équation différentielle précédente.

3. Lorsque la surface (S) est telle que $r-t$ et s sont des quantités simultanément nulles, c'est-à-dire lorsque cette surface est un paraboloïde de révolution d'axe vertical, l'équation différentielle est indéterminée. J'ai établi que, dans ce cas singulier, tout réseau conjugué de ce paraboloïde se projette suivant un réseau orthogonal. Dans ce cas d'exception, il est toujours permis de prendre pour axe Oz l'axe de révolution du paraboloïde ; l'équation de celui-ci est alors

$$z = \frac{x^2+y^2}{2a};$$

les équations de la droite d deviennent

$$X = x\left(1-\frac{Z}{a}\right),$$
$$Y = y\left(1-\frac{Z}{a}\right);$$

la congruence (Γ) associée au paraboloïde de révolution est donc formée par les droites émanant d'un point fixe de coordonnées

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = a;$$

Cette propriété résulte de ce que la sous-normale de la parabole est constante. Puisque la congruence (Γ) est alors constituée par les droites issues d'un point

fixe, toutes les séries réglées de cette congruence sont évidemment développables.

Des considérations qui précèdent il résulte donc *qu'il y a équivalence entre le problème qui consiste à déterminer sur* (S) *le réseau conjugué qui se projette horizontalement suivant un réseau orthogonal et celui qui consiste à déterminer les séries développables de la congruence* (Γ) *associée à la surface* (S).

Dans ces conditions, il est manifeste que les deux questions 975 et 1053, posées respectivement en 1869 et en 1871, se rattachent à un même ensemble de recherches inédites de Ribaucour.

4. Les congruences (Γ) me paraissent donc mériter une étude particulière : ce sera l'objet de la suite du présent article.

Toute congruence de droites définie par les équations

$$X = x - AZ,$$
$$Y = y - BZ,$$

dans lesquelles A et B sont deux fonctions arbitraires des variables x et y, ne peut être envisagée comme une congruence (Γ) particulière. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les deux fonctions A et B satisfassent à la condition

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x};$$

lorsque cette condition est remplie, il existe une fonction z, définie à une constante additive près, dont A et B sont les deux dérivées partielles du premier ordre. Cette fonction z caractérise une surface, qui est la surface (S) associée à la congruence (Γ). D'après ce qui

précède, la surface (S) est complètement déterminée, à une translation près de direction Oz.

5. Les équations des plans focaux de la congruence (Γ) associée à une surface (S) s'obtiennent en remplaçant dans l'équation

$$(Y + qZ - y) + \lambda(X + pZ - x) = 0,$$

λ par l'une ou l'autre des racines de l'équation du second degré

$$\lambda^2 + \frac{r - t}{s}\lambda - 1 = 0:$$

ces racines sont toujours réelles et distinctes : de même que les congruences de normales, les congruences (Γ) admettent donc toujours des nappes réelles de surface focale.

En écrivant que les deux plans focaux sont rectangulaires, on obtient la condition

$$pq(r - t) = (p^2 - q^2)s;$$

cette équation aux dérivées partielles du second ordre caractérise les surfaces moulures attachées aux cylindres verticaux. *La condition nécessaire et suffisante pour que la congruence* (Γ) *soit une congruence de normales est donc que la surface associée* (S) *soit une surface moulure attachée à un cylindre vertical.*

Ce résultat peut être encore établi directement ainsi que l'a fait M. Pellet, dans sa solution de la question 1053, publiée par les *Nouvelles Annales* de 1874 (p. 440); il faut que l'expression

$$p\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,dx + q\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,dy,$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,dz,$$

soit une différentielle exacte ; il faut donc que $p^2 + q^2$ soit une fonction de z, c'est-à-dire que la surface (S) soit une surface moulure. L'équation aux dérivées partielles du second ordre précédemment écrite n'est autre que l'équation obtenue en égalant à zéro le déterminant fonctionnel de z et de $p^2 + q^2$.

La Géométrie pure permet d'ailleurs d'obtenir le même résultat et de définir simplement les surfaces parallèles qui sont les trajectoires orthogonales de la congruence de normales. Les développables de la congruence (Γ) tracent, en effet, un réseau orthogonal [le réseau (C) projeté] sur le plan Oxy : les plans focaux d'une congruence (Γ) de normales doivent donc être rectangulaires entre eux et découper un angle droit dans le plan Oxy, qui est supposé horizontal. De cette double condition il résulte que l'un des deux plans focaux doit être vertical. La congruence (Γ) est formée par les normales d'une famille de surfaces moulures ; la surface (S) doit donc être elle-même une surface moulure attachée au même cylindre.

6. L'équation du second degré qui définit les cotes Z_1 et Z_2 des deux foyers du rayon d de la congruence générale (Γ) est

$$(rt - s^2)Z^2 - (r + t)Z + 1 = 0;$$

cette équation a toujours deux racines réelles, distinctes en général : ce n'est que dans le cas singulier du paragraphe 3 que les deux foyers sont confondus.

Si la surface (S) est développable, l'un des foyers F_2 est à l'infini ; l'autre est toujours à distance finie (la surface étant réelle) et a pour cote

$$Z_1 = \frac{1}{r + t}.$$

Ce cas étant excepté, les deux foyers toujours réels sont à distance finie; leurs cotes satisfont aux deux relations

$$\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = r + t,$$

$$\frac{1}{Z_1 Z_2} = rt - s^2.$$

Dans les deux articles cités, j'ai mis en évidence de nombreuses analogies des lignes (C) de la surface (S) et des lignes de courbure. On peut considérer l'équation

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy}$$

comme rappelant les formules d'Olinde Rodrigues; si l'on pose

$$dx = Z\,dp,$$
$$dy = Z\,dq,$$

l'élimination de dx et dy, entre les équations linéaires et homogènes obtenues, donne une équation du second degré en Z

$$Z^2(rt - s^2) - (r + t)Z + 1 = 0,$$

qui est celle des cotes des points focaux. Pour rendre l'analogie plus profonde, introduisons les distances ρ_1, ρ_2 du point de départ m du rayon aux deux foyers F_1 et F_2; c'est-à-dire posons

$$\rho_1 = Z_1\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \qquad \rho_2 = Z_2\sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

on obtient ainsi

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{r + t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{rt - s^2}{1 + p^2 + q^2};$$

ces deux quantités sont analogues à la courbure moyenne et à la courbure totale de la surface (S).

7. De la première de ces deux formules il résulte que les surfaces intégrales de l'équation de Laplace

$$r + t = 0$$

sont analogues aux surfaces minima. Pour une surface minima générale, les asymptotiques sont orthogonales dans l'espace ; pour une surface intégrale de l'équation de Laplace, les asymptotiques sont orthogonales en projection sur un plan horizontal.

Lorsque la surface (S) est une surface intégrale de l'équation de Laplace, les cotes des foyers satisfont à la relation

$$Z_1 + Z_2 = 0;$$

le point de départ est donc le point m. Ainsi *pour que la congruence* (Γ) *admette le plan* Oxy *pour surface médiane, il faut et il suffit que la surface* (S) *soit une surface intégrale de l'équation de Laplace.*

J'ai déterminé le réseau (C) d'une surface de cette nature, dans l'article cité et inséré dans les *Nouvelles Annales*.

Plus généralement, cherchons quelle doit être la surface (S) pour que la surface médiane de la congruence associée (Γ) soit un plan horizontal. Prenons le plan d'équation

$$z = \frac{1}{2}a;$$

on doit avoir

$$Z_1 + Z_2 = a;$$

la surface (S) est donc l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles de second ordre

$$\frac{rt - s^2}{r + t} = a,$$

c'est-à-dire

$$\left(r - \frac{1}{a}\right)\left(t - \frac{1}{a}\right) = s^2 + \frac{1}{a^2}.$$

Pour intégrer cette équation, posons

$$z = z_1 + \frac{x^2 + y^2}{2a};$$

elle devient

$$r_1 t_1 - s_1^2 = \frac{1}{a^2},$$

c'est-à-dire l'équation qu'on rencontre fréquemment en Physique mathématique et en Géométrie et qu'on désigne habituellement sous le nom d'*équation de la théorie de la chaleur*. Ainsi donc :

Pour que la congruence (Γ) *admette pour surface médiane un plan horizontal, il faut et il suffit que la surface associée* (S) *soit la surface diamétrale, pour les cordes verticales, d'une intégrale de l'équation de la théorie de la chaleur et du paraboloïde de révolution d'axe vertical qui est intégrale particulière de cette équation.*

On peut exprimer les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la surface (S) en utilisant les expressions que donne M. Darboux à la page 273 du troisième Tome de ses *Leçons sur la théorie des surfaces :* on a

$$\frac{ix_1}{a} = V' - U',$$

$$\frac{iy_1}{a} = u - v,$$

$$\frac{iz_1}{a} = (u + v)(V' - U') + 2U - 2V,$$

formules qui sont prolongées par les suivantes

$$p = u + v,$$

$$q = U' + V';$$

l'équation du réseau (C),

$$dp\,dy - dq\,dx = 0,$$

devient alors

$$(1 + U''^2)\,du^2 = (1 + V''^2)\,dv^2,$$

d'où les lignes (C) par deux quadratures

$$\int \sqrt{1 + U''^2}\,du \pm \int \sqrt{1 + V''^2}\,dv = \text{const.}$$

Telles sont les projections des lignes (C) des surfaces intégrales de l'équation

$$rt - s^2 = \frac{1}{a^2},$$

et, par conséquent, des surfaces (S) associées à une congruence (Γ) dont la surface médiane est un plan horizontal.

8. Une transformation analogue permet de définir la surface (S) la plus générale pour laquelle une nappe de la surface focale de la congruence (Γ) associée à (S) est réduite à une courbe plane, située dans un plan horizontal. Soit $z = a$ l'équation de ce plan. L'équation aux cotes des foyers doit admettre a pour racine ; la surface (S) est donc l'intégrale générale de l'équation de Monge-Ampère

$$\left(r - \frac{1}{a}\right)\left(t - \frac{1}{a}\right) - s^2 = 0;$$

la transformation

$$z = z_1 + \frac{x^2 + y^2}{2a}$$

la change en l'équation des surfaces développables

$$r_1 t_1 - s_1^2 = 0.$$

Par conséquent, *la surface* (S) *la plus générale pour laquelle une nappe de la surface focale de la congruence associée* (Γ) *est une courbe plane, située dans un plan horizontal, est la surface diamétrale, pour des cordes verticales, du paraboloïde de révolution d'axe vertical et d'une surface développable arbitraire.*

La surface diamétrale précédente peut être évidemment remplacée par la surface lieu des points qui divisent, dans un rapport constant donné, les cordes verticales, limitées à une développable particulière et au paraboloïde de révolution.

Toutes ces surfaces associées à une développable admettent pour réseau (C) projeté celui de la surface développable elle-même. Dans le cas d'une surface développable, le réseau (C) projeté comprend les courbes d'équation

$$dp = 0,$$

c'est-à-dire les projections des génératrices. De même que, sur la surface développable, les lignes de courbure sont constituées par les génératrices et leurs trajectoires orthogonales, de même les lignes (C) projetées sont constituées par les projections des génératrices et les développantes de la projection de l'arête de rebroussement.

9. Les surfaces (S), réglées et à plan directeur horizontal, sont caractérisées par la propriété suivante des congruences (Γ). On sait qu'on désigne sous le nom de surface centrale d'une congruence de droites la surface qui est l'enveloppe du plan perpendiculaire à tout rayon au milieu du segment focal. Le plan perpendiculaire au rayon, au point de départ m de ce rayon

enveloppe de même une certaine surface (Σ) : le plan a pour équation

$$(X - x)p + (Y - y)q = Z;$$

les coordonnées du point de contact de ce plan avec son enveloppe (Σ) s'obtiennent en adjoignant à l'équation précédente les deux équations obtenues par dérivations partielles

$$(X - x)r + (Y - y)s = p,$$
$$(X - x)s + (Y - y)t = q;$$

les coordonnées de ce point de contact sont donc

$$X = x + \frac{pt - qs}{rt - s^2},$$

$$Y = y + \frac{qr - ps}{rt - s^2},$$

$$Z = \frac{p^2 t - 2pqs + q^2 r}{rt - s^2};$$

imposons la condition $Z = 0$: la surface (Σ) dégénère alors en une courbe du plan Oxy et réciproquement. La surface (S) la plus générale pour laquelle cette circonstance se présente est intégrale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$p^2 t - 2pqs + q^2 r = 0;$$

cette équation caractérise les surfaces réglées à plan directeur horizontal.

La surface (Σ) est généralement distincte de la surface centrale de la congruence (Γ) : ce n'est que pour les congruences (Γ) associées à une surface (S) intégrale de l'équation de Laplace qu'il y aura identité entre ces deux surfaces. On sait, d'après Meusnier, que la seule surface qui satisfait simultanément aux

deux équations

$$r + t = 0,$$
$$p^2 t - 2pqs + q^2 r = 0,$$

est l'hélicoïde gauche à plan directeur. Dans le cas où la surface (S) est de cette nature, il résulte des considérations précédentes que la congruence (Γ) associée à cet hélicoïde admet le plan Oxy pour surface médiane et une certaine courbe de ce plan pour surface centrale. Cette courbe est réduite à un point : lorsque (S) est un conoïde d'équation

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

la relation

$$px + qy = 0$$

exprime en effet que la surface (Σ) associée est l'origine O des axes coordonnés. Il en est ainsi, en particulier, pour l'hélicoïde (S) d'équation

$$z = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}.$$

10. En introduisant les coordonnées polaires par les formules

$$x = \rho \cos\omega, \qquad y = \rho \sin\omega, \qquad z = \omega,$$

les équations de la congruence (Γ) associée à l'hélicoïde gauche à plan directeur sont

$$X = \rho \cos\omega + \frac{\sin\omega}{\rho} Z,$$
$$Y = \rho \sin\omega - \frac{\cos\omega}{\rho} Z;$$

l'équation des cotes des foyers est

$$Z^2 - \rho^4 = 0,$$

d'où

$$Z_1 = \rho^2,$$
$$Z_2 = -\rho^2;$$

les nappes de la surface focale de cette congruence sont deux paraboloïdes de révolution d'équations respectives

$$x^2 + y^2 - 2z = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2z = 0;$$

cette congruence (Γ) est de révolution autour de l'axe Oz; elle est définie par le complexe linéaire d'équation

$$p_3 = p_6$$

et par le complexe des droites équidistantes de deux points A, B de l'axe Oz, extrémités d'un segment de milieu O.

[J1b]

SUR UN PROBLÈME D'ÉNUMÉRATION;

PAR M. CH. HALPHEN.

Un problème, déjà ancien, posé récemment aux Examens oraux de l'École Polytechnique, m'a suggéré la Note suivante. Voici quelle était la question :

On joint deux à deux par des droites, de toutes les manières possibles, n points donnés dans un plan; en combien de points ces droites se coupent-elles?

Je rappelle rapidement la solution : k droites d'un plan se coupent en $\frac{k(k-1)}{2}$ points; le nombre des

droites est ici $k = C_n^2$. Il faut déduire du nombre total des points d'intersection les points donnés; chacun d'eux étant commun à $n - 1$ droites, compte pour $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points confondus. Le nombre cherché est donc

$$N = \frac{C_n^2(C_n^2 - 1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$$
$$= \frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n-3),$$

ou encore

$$N = 3C_n^4.$$

Ce résultat peut encore s'obtenir d'une manière très simple. Si $n = 4$, on a trois points d'intersection (la figure étant un quadrilatère complet). On aura donc autant de fois trois points d'intersection que de groupements différents de 4 points; le nombre cherché est alors $3C_n^4$.

Quoique ce mode de raisonnement soit plus élégant que le premier, je ne le place qu'en second lieu, parce qu'il ne se prête pas aisément à la généralisation que j'ai en vue.

Proposons-nous le problème suivant :

Étant donnés n points dans l'espace, on considère tous les plans déterminés par trois quelconques de ces points; quel est le nombre de leurs droites d'intersection?

k plans se coupent suivant $\frac{k(k-1)}{2}$ droites, et les n points déterminent $k = C_n^3$ plans distincts. On peut classer leurs intersections en trois catégories : 1° les droites passant par deux des points donnés; 2° les droites passant seulement par un des points donnés; 3° les droites qui ne passent par aucun de ces points.

1° Si l'on prend deux des points, on voit, en leur

associant successivement les $n-2$ autres, que la droite qui les joint est commune à $n-2$ plans; elle compte donc pour $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ droites confondues. Les droites joignant les points 2 à 2, étant au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$, comptent au total pour

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} = 6C_n^4 \text{ droites d'intersection.}$$

2° Si l'on prend un seul point, on peut l'associer de C_{n-1}^2 manières différentes à deux des points restants; on aura donc $h = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ plans se coupant suivant $\frac{h(h-1)}{2}$ droites *distinctes ou confondues*, passant par le point choisi. En faisant de même avec tous les points, on obtiendra $\frac{nh(h-1)}{2}$ droites distinctes ou confondues.

Parmi ces droites se trouvent celles que j'ai classées dans la première catégorie, et chacune d'elles est répétée deux fois. En effet, si je choisis d'abord le point a, je considérerai les plans abc, abd, qui se coupent suivant ab; lorsque j'isolerai ensuite le point b, je retrouverai les mêmes plans bac, bad; de sorte que ab a été comptée deux fois. Or, toutes les droites telles que ab comptent pour $6C_n^4$ droites d'intersection; le nombre véritable des droites de seconde espèce, ne passant que par un seul des points donnés, est donc

$$\frac{nh(h-1)}{2} - 12C_n^4,$$

ou, en remplaçant h par sa valeur $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$,

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{8} = 15C_n^5.$$

3° On déduit aisément de là le nombre des droites d'intersection ne passant par aucun des points donnés. C'est

$$\frac{k(k-1)}{2} - 6\,C_n^4 - 15\,C_n^5,$$

ou, en remplaçant k par sa valeur C_n^3,

$$N = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{72} = 10\,C_n^6.$$

Cette formule montre que, pour obtenir des droites d'intersection des trois espèces, il faut prendre au moins $n = 6$. Or, il paraît difficile de faire la figure dans ce cas, et d'y compter les 15 droites de première espèce, les 90 de deuxième, et les 10 de troisième, suivant lesquelles se coupent les 20 plans que l'on obtient. C'est la raison pour laquelle la méthode, appliquée plus haut au problème élémentaire, ne pouvait s'étendre au cas actuel.

Pour compléter l'étude de ce problème, je vais chercher *le nombre des trièdres* formés par les plans que déterminent, trois à trois, les n points donnés, c'est-à-dire le nombre des points communs à ces plans trois à trois, car je ne compterai que pour un seul les différents trièdres de même sommet formés par trois plans déterminés. Dans ces conditions, k plans forment en général C_k^3 trièdres dont les sommets sont distincts ; on a ici $k = C_n^3$ plans différents.

1° Parmi ces plans se trouvent ceux qui passent par une droite joignant deux des points donnés ; ils ne forment pas de trièdre. Il y en a $n-2$, ce qui supprime C_{n-2}^3 trièdres ; et comme il existe $\frac{n(n-1)}{2}$ droites joignant deux à deux les n points, on doit

déduire, du nombre total des trièdres, le nombre

$$N_1 = \frac{n(n-1)}{2} C_{n-2}^3$$

ou

$$N_1 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{12} = 10 C_n^5.$$

2° Chacun des points donnés est sommet commun à plusieurs trièdres ; il y passe $p = C_{n-1}^2$ plans qui devraient se couper en C_p^3 points distincts. Les points donnés comptent donc pour $n C_p^3$ sommets de trièdres ; mais il faut déduire de ce nombre les groupements du paragraphe précédent dont il a été tenu compte ici, et cela deux fois. De sorte que tous les points donnés sont les sommets de

$$N_2 = n C_p^3 - 20 C_n^5 \text{ trièdres ;}$$

on peut écrire

$$N_2 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{48}(n^3 - 3n^2 - 10n + 32).$$

3° Les trièdres autres que les précédents forment encore deux groupes : ceux dont les sommets sont sur les droites joignant deux à deux les points donnés, et ceux dont les sommets sont en dehors de ces droites.

Si l'on considère une droite ab joignant deux des points donnés, elle est coupée par les C_{n-2}^3 plans qui ne passent ni par a, ni par b, en C_{n-2}^3 points distincts; chacun de ces points est commun au plan sécant et aux $n-2$ plans passant par ab, lesquels forment C_{n-2}^2 trièdres, comme on voit en associant le plan sécant aux différents groupes de deux plans passant par ab. On peut remarquer aussi que le point considéré est commun à $n-1$ plans et doit compter pour C_{n-1}^3 sommets de trièdres, nombre dont il faut déduire les

combinaisons trois à trois des plans passant par ab, qui ne forment pas de trièdre, et dont on a déjà tenu compte pour leur valeur C_{n-2}^3 (*voir* 1°); or

$$C_{n-1}^3 - C_{n-2}^3 = C_{n-2}^2.$$

En résumé, sur toutes les droites telles que ab, on a

$$\frac{n(n-1)}{2} C_{n-2}^3 \text{ points,}$$

sommets de

$$N_3 = \frac{n(n-1)}{2} C_{n-2}^2 C_{n-2}^3 \text{ trièdres;}$$

on peut encore écrire

$$N_3 = 10\, C_n^5 C_{n-2}^2.$$

4° Enfin, le nombre des sommets non communs à plusieurs trièdres, situés en dehors des droites joignant les points donnés deux à deux, est

$$N_4 = C_k^3 - (N_1 + N_2 + N_3)$$

ou

$$N_4 = C_k^3 - n C_p^3 - 10\, C_n^5 (C_{n-2}^2 - 1).$$

Dans cette formule, n représente le nombre des points donnés, et l'on fait

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \qquad k = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Ces derniers points ne se manifestent qu'à partir de $n = 6$. Dans ce cas de $n = 6$, on a $N_2 = 600$: chacun des points donnés est donc sommet commun à 100 trièdres différents. Il y a $N_3 = 360$ trièdres ayant 90 sommets sur les 15 droites joignant les points deux à deux ; sur chacune de ces droites se trouvent 6 sommets dont chacun est commun à 4 trièdres. Il y a enfin $N_4 = 120$ trièdres dont les sommets distincts sont en dehors des droites précédentes.

En prenant seulement $n = 5$, on trouve

$$N_2 = 80, \qquad N_3 = 30, \qquad N_4 = 0.$$

On remarquera que chacun des points donnés est sommet commun à 16 trièdres. Pour vérifier l'exactitude de ce nombre déjà assez grand, et énumérer ces trièdres, voici comment on peut procéder. La méthode s'appliquerait évidemment à un nombre quelconque de points.

Je considère un des points donnés, et je nomme 1, 2, 3, 4, les droites qui le joignent aux quatre autres. Alors, tout plan passant par ce point contient deux des quatre droites, et je le désignerai par les numéros de ces deux droites. On a donc les 6 plans

12, 13, 14, 23, 24, 34.

Pour former un trièdre ayant son sommet au point choisi, il suffit d'associer trois de ces plans de telle façon que chaque chiffre soit répété deux fois; plus exactement, de telle façon qu'aucun des chiffres ne soit répété trois fois; et les groupements formés doivent être tous différents. Le Tableau suivant, donnant les 16 combinaisons utiles, montre suffisamment comment on peut opérer pour énumérer ces trièdres sans omission ni répétition :

									Trièdres distincts.
12	avec	13	et	23	ou	24	ou	34	3
12	»	14	»	23	»	24	»	34	3
12	»	23	»	34					1
12	»	24	»	34					1
13	»	14	»	23	»	24	»	34	3
13	»	23	»	24					1
13	»	24	»	34					1
14	»	23	»	24	»	34			2
14	»	24	»	aucun autre					0
23	»	24	»	34					1
				Total.					16

Ce procédé me paraît utile, car il ne faut pas songer à vérifier un résultat de ce genre sur une figure, même bien faite.

[H11c]

SUR LES VARIATIONS DE LA DÉTERMINANTE ET DE LA RÉSOLVANTE DE FREDHOLM AVEC LE CHAMP D'INTÉGRATION;

Par M. Ch. PLATRIER,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

---

1. Soient (S) un domaine du plan complexe contenant le segment réel (o — 1), α une variable réelle comprise entre o et 1, $H(x,y)$ une fonction holomorphe pour x et y situés dans le domaine (S), M une limite supérieure de $|H(x,y)|$ pour ces valeurs de x et y.

Posons

$$H\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_\varpi \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} H(x_1, y_1) & \ldots & H(x_1, y_\varpi) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ H(x_\varpi, y_1) & \ldots & H(x_\varpi, y_\varpi) \end{vmatrix},$$

et considérons la déterminante de Fredholm :

$$(1)\quad D(\lambda, \alpha) = \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{(-\lambda)^\varpi}{\omega!} \times \int_0^\alpha ds_1 \int_0^\alpha ds_2 \ldots \int_0^\alpha ds_\varpi \, H\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \\ s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \end{pmatrix},$$

son mineur d'ordre q :

$$(2)\quad D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}\lambda, \alpha\Bigg)$$

$$= \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{(-\lambda)^{\omega}}{\omega!} \int_0^{\alpha} ds_1 \int_0^{\alpha} ds_2 \ldots \int_0^{\alpha} ds_{\varpi}\, H\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q; s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \\ y_1, y_2, \ldots, y_q; s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \end{pmatrix}$$

et la résolvante :

$$(3)\qquad \mathcal{H}(x, y, \lambda, \alpha) = \frac{D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda, \alpha\Bigg)}{D(\lambda, \alpha)},$$

laquelle satisfait aux identités :

$$(4)\quad \mathcal{H}(x, y, \lambda, \alpha) = H(x, y) + \lambda \int_0^{\alpha} H(x, s)\, \mathcal{H}(s, y, \lambda, \alpha)\, ds$$

$$= H(x, y) + \lambda \int_0^{\alpha} H(s, y)\, \mathcal{H}(x, s, \lambda, \alpha)\, ds.$$

Je me propose de donner des dérivées premières par rapport à α des fonctions (1), (2), (3) certaines expressions qui sont susceptibles d'être utilisées avec profit dans l'étude des nombres fondamentaux du noyau $H(x, y)$ lorsque l'on considère ces nombres comme des fonctions de α.

2. La dérivée par rapport à α du terme $T_{\varpi}(\alpha)$ de rang ϖ de la série $D(\lambda, \alpha)$ est

$$\frac{d\,T_{\varpi}(\alpha)}{d\alpha}$$

$$= \frac{(-\lambda)^{\varpi}}{(\omega-1)!} \int_0^{\alpha} ds_1 \int_0^{\alpha} ds_2 \ldots \int_0^{\alpha} ds_{\varpi-1}\, H\begin{pmatrix} \alpha, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi-1} \\ \alpha, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi-1} \end{pmatrix}.$$

On le voit facilement en calculant la partie principale de $[T_{\varpi}(\alpha + \Delta\alpha) - T_{\varpi}(\alpha)]$ et en tenant compte : d'un côté, de la non-importance du nom des variables d'intégration qui entrent dans les fonctions placées

sous les signes $\int_0^\alpha$, et, de l'autre, de la symétrie en $s_1, s_2, \ldots, s_\varpi$ de la fonction $\mathrm{H}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \\ s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \end{pmatrix}$.

Or, la série $\mathrm{D}(\lambda, \alpha)$ est une série de fonctions holomorphes de α pour α situé dans le domaine (S); de plus, elle est absolument et uniformément convergente pour $0 \leqq \alpha \leqq 1$; car, d'une part, son terme $\mathrm{T}_\varpi(\alpha)$ est moindre que

$$u_\varpi = \frac{|\lambda|^\varpi}{\omega!} \mathrm{M}^\varpi \varpi^{\frac{\varpi}{2}},$$

d'après le théorème de M. Hadamard sur la valeur absolue d'un déterminant et, d'autre part,

$$\lim \frac{u_{\varpi+1}}{u_\varpi} = \lim \frac{|\lambda|}{\sqrt{\omega+1}} \mathrm{M}\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\frac{\varpi}{2}} = 0.$$

La dérivée de la série $\mathrm{D}(\lambda, \alpha)$ par rapport à α s'obtient donc en faisant la somme des dérivées de ses différents termes, et, par suite, si $0 \leqq \alpha \leqq 1$, on a

$$(5) \qquad \frac{\partial \mathrm{D}(\lambda, \alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{d\,\mathrm{T}_\varpi(\alpha)}{d\alpha} = -\lambda\, \mathrm{D}\left(\begin{matrix} \alpha \\ \alpha \end{matrix} \middle| \lambda, \alpha\right).$$

Nous pouvons écrire aussi l'égalité (5) sous la forme

$$(5\ bis) \qquad \frac{\partial \log \mathrm{D}(\lambda, \alpha)}{\partial \alpha} = -\lambda\, \mathcal{H}(\alpha, \alpha, \lambda, \alpha).$$

3. La formule

$$(6) \qquad \frac{\partial \mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix} \middle| \lambda, \alpha\right)}{\partial \alpha} = -\lambda\, \mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q, \alpha \\ y_1, y_2, \ldots, y_q, \alpha \end{matrix} \middle| \lambda, \alpha\right)$$

s'établira d'une façon analogue à la formule (5).

4. Enfin, dérivons par rapport à α les deux membres de la première égalité (4), nous obtenons

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, y, \lambda, \alpha)}{\partial \alpha} = \lambda \mathrm{H}(x, \alpha)\mathcal{H}(\alpha, y, \lambda, \alpha) + \lambda \int_0^\alpha \mathrm{H}(x, s) \frac{\partial \mathcal{H}(x, s, \lambda, \alpha)}{\partial \alpha} ds.$$

La méthode de Fredholm pour la résolution de l'équation intégrale linéaire de deuxième espèce permet de déduire de cette égalité la suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, y, \lambda, \alpha)}{\partial \alpha} = \lambda \mathrm{H}(x, \alpha)\mathcal{H}(\alpha, y, \lambda, \alpha) + \lambda \int_0^\alpha \mathcal{H}(x, s, \lambda, \alpha)\mathrm{H}(s, \alpha)\mathcal{H}(\alpha, y, \lambda, \alpha)\, ds$$

soit, en vertu de la seconde égalité (4),

$$(7) \qquad \frac{\partial \mathcal{H}(x, y, \lambda, \alpha)}{\partial \alpha} = \lambda \mathcal{H}(x, \alpha, \lambda, \alpha)\mathcal{H}(\alpha, y, \lambda, \alpha).$$

Les égalités (5), (5 *bis*), (6) et (7) sont les égalités que nous avions en vue.

CORRESPONDANCE.

M. **Parmentieff**, professeur à l'Université de Kazan, nous fait connaître qu'il avait fait paraître dans le *Bulletin de la Société physico-mathématique de Kazan*, Tome XVII, n° 2, 1911, une solution de la question 2180, résolue, page 47 du présent Tome.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Nancy.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Analyse. — *Intégrer l'équation*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

et construire les courbes intégrales.

GÉOMÉTRIE. — *Définition et détermination des développantes des courbes.*

Mécanique. — *Un point de masse* 1 *se déplace dans un champ de forces défini par les équations*

$$X = \frac{y}{z}, \qquad Y = \frac{x}{z}, \qquad Z = -\frac{xy}{z^2}.$$

Déterminer les lignes de force, les surfaces de niveau et le travail pour un déplacement donné. Étudier le mouvement du point lorsqu'il est assujetti à se déplacer sans frottement sur une droite donnée.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans un cercle de rayon* R *on considère un segment compris entre un arc de mesure* 2α *et la corde de cet arc. Évaluer le volume engendré par ce segment en tournant autour de sa corde. Application numérique au cas où* $R = 1$ *et* $\alpha = 28°32'$; *limite de l'erreur si* α *est connu à une minute près.*

(Octobre 1910.)

Poitiers.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on considère la droite* D *dont l'équation,*

en fonction du paramètre φ, *est*

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \cos^2\varphi.$$

1° *Former l'équation différentielle du premier ordre dont l'intégrale générale est représentée par la draite* D.

2° *Exprimer à l'aide du paramètre* φ *les coordonnées du point* D *où la droite* D *touche son enveloppe* E *et construire cette enveloppe.*

3° *Calculer la longueur de la courbe* E *et l'aire du domaine plan qu'elle limite.*

4° *Exprimer, à l'aide du paramètre* φ, *les coordonnées du centre de courbure de la courbe* E *au point* P *et construire la développée de* E.

Comment calculerait-on la longueur d'un arc de cette développée ?

Épreuve pratique. — *Un mobile est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale* v_0. *Il est soumis à son poids* p *et à une résistance* kv^2, *proportionnelle au carré de la vitesse* v *et dirigée en sens contraire :*

1° *Établir les équations du mouvement ascendant.*

2° *Déterminer la durée de ce mouvement et la hauteur atteinte.* (*Application numérique : masse du mobile* 1, $v_0 = 300$, $k = \frac{1}{60}$; *accélération de la pesanteur*, 980; *tous ces nombres sont donnés en unités* C. G. S.)

3° *Établir les équations du mouvement descendant.*

4° *Déterminer la vitesse du mobile au moment où il repasse par sa position initiale.* (*Application numérique : mêmes données que plus haut.*)

5° *Que deviennent les expressions trouvées aux n*os 2 *et* 4, *quand on fait tendre* k *vers* 0 ? *Expliquer le résultat.*

(Juillet 1910.)

Épreuve théorique. — *Une manivelle* OA *de longueur* r *tourne dans un plan fixe* OABC *autour du point fixe* O *avec une vitesse angulaire* constante ω. *Elle entraîne une bielle* AB, *de longueur* a, *articulée à* OA *en* A *et articulée à une tige* BC *en* B. *Des guides fixes maintiennent cette tige sur une droite fixe* OBC *passant par* O. *On appellera* θ *l'angle* BOA, x *la longueur* OB *et l'on supposera* $a > r$:

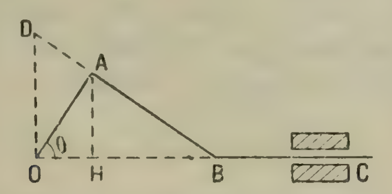
1° *Déterminer et construire la courbe fermée lieu du milieu de* AB.

2° *Calculer l'aire de cette courbe.*

3° *Exprimer en fonction de* θ *la vitesse* v *et l'accélération* γ *de* B.

4° *Représenter le rapport* $\frac{v}{r\omega}$ *par une série entière de puissances croissantes de la quantité* $\lambda = \frac{a}{r}$.

5° *En appelant* D *l'intersection de la droite* BA *avec la*



perpendiculaire à OB *en* O, *montrer que* v *reste proportionnel à* OD *dans le cours du mouvement.*

6° *Étudier la variation de la vitesse* v *pendant le mouvement.*

Épreuve pratique. — *On donne la série*

$$\cos x + r\cos 2x + r^2\cos 3x + \ldots + r^n\cos(n+1)x + \ldots.$$

1° *Démontrer que cette série est convergente pour toute valeur de* x *lorsqu'on a* $|r| < 1$.

2° *Soit* $S_n(x)$ *la somme des* n *premiers termes de la série. Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près les racines (comprises entre* $-180°$ *et* $+180°$*) des équations*

$$S_1(x) = 0, \qquad S_2(x) = 0, \qquad S_3(x) = 0,$$

où l'on suppose $r = \frac{1}{10}$.

3° *Calculer à* $\frac{1}{10000}$ *près la somme de la série donnée lorsque*

$$r = \frac{1}{100}, \qquad x = 61°.$$

(Juin 1911.)

Rennes.

Épreuve théorique. — 1° *Trouver l'intégrale de l'équation différentielle*

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} + \lambda = -\frac{3a}{2}\sin 2t.$$

Montrer que si l'on détermine les constantes d'intégration de manière qu'on ait, pour $t = 0$,

$$\lambda = 0, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = a;$$

l'intégrale trouvée se réduit à $\lambda = a \sin t \cos t$.

2° *Trouver l'enveloppe* (E) *des droites définies par l'équation*

$$x \cos t + y \sin t - a \sin t \cos t = 0.$$

Exprimer, en fonction de t, *les coordonnées du point de contact et montrer que l'élimination du paramètre* t *donne, entre les coordonnées, l'équation*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Étudier la forme de la courbe, calculer le rayon de courbure, les coordonnées du centre de courbure, la longueur de l'arc, comptée à partir du point $t = 0$.

Trouver la développée. Montrer que si l'on fait tourner les axes de coordonnées autour de l'origine d'un angle de 45°, *les équations qui définissent la développée prennent une forme semblable à celles qui définissent l'enveloppe* (E) *dans le premier système de coordonnées.*

Épreuve théorique. — I. *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}:$$

1° *En faisant le changement de variable*

$$1 - x = z^2;$$

2° *Au moyen de l'intégration par parties.*

II. *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)}\right) y = x^2.$$

Vérifier qu'elle admet comme solution particulière un polynome du troisième degré.

(Juillet 1910.)

SOLUTION DE QUESTION PROPOSÉE.

2180.

(1911, p. 96.)

Démontrer la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\omega \cos 3\omega \sqrt{\cos 2\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. T. ONO (Kagoshimo).

Soit

$$\cos^2\omega = x,$$

il vient, en remarquant que les racines de $-2x^2+3x-1=0$ sont $\frac{1}{2}$ et 1,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\omega \cos 3\omega \sqrt{\cos 2\omega}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(2x^2-x)(4x-3)}{(-2x^2+3x-1)^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$= -\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x^2-x)\, d(-2x^2+3x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (4x-1)(-2x^2+3x-1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(-2x^2+3x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{4x-3}{4}(2x^2+3x-1)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$+ \frac{1}{8\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{(-2x^2+3x-1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\arc\sin(4x-3)\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\pi.$$

Autre solution par M. BOUVAIST.

QUESTIONS.

2205. *On donne, dans un même plan, deux courbes* C *et* C'. *La tangente en un point* M *de* C *rencontre* C' *au point* M'; *les normales en* M *à* C *et en* M' *à* C' *se coupent au point* I. *Cela posé, construire la tangente et le centre de courbure en* I *à la trajectoire de ce point.*

N. Abramescu.

2206. *On donne, dans un même plan, deux coniques* C *et* C'. *La tangente en un point quelconque* M *de* C *coupe* C' *aux points* A, B. *On détermine sur cette tangente un quatrième point* N *par la condition que le rapport anharmonique* (ABM) *ait une valeur constante* λ. *Trouver le lieu du point* N. *Cas particulier :* $\lambda = -1$.

N. Abramescu.

ERRATA.

Page 142, lignes 6 et 10, au lieu de

cercle MPQ,

lire

triangle MPQ.

[M¹ 6b]

SUR LA CONCHOÏDE DE KÜLP;

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

1. La conchoïde de Külp est définie de la manière suivante : on donne un cercle C de centre O, de rayon a et la tangente AT à l'extrémité A du diamètre AA′ de ce cercle; un rayon variable rencontre C en P et AT en N; les parallèles menées par P et N respectivement à AT et OA se coupent en un point M, dont le lieu est la conchoïde de Külp.

Cette courbe a été signalée par Külp dans l'*Archiv der Math. und Physik*, 1868.

Prenons comme axe des x le rayon OA, comme axe des y le diamètre perpendiculaire. Si l'on désigne par φ l'angle AOP, on a pour les coordonnées de M :

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = a\tang\varphi,$$

et l'équation de la conchoïde s'écrit

$$x^2y^2 = a^2(a^2 - x^2).$$

L'équation de la courbe est le résultat de l'élimination de z entre les deux équations

$$x^2 + z^2 = a^2, \qquad xy = az.$$

Par suite, *la conchoïde de Külp est la projection sur le plan xy de la courbe d'intersection du cylindre de rayon a de révolution autour de l'axe y et d'un paraboloïde hyperbolique équilatère $xy = az$.*

L'un des systèmes de génératrices de cette dernière surface est formé par des droites qui s'appuient sur

l'axe x et sont parallèles au plan yz, l'autre par des droites qui s'appuient sur l'axe y et sont parallèles au plan xz. Si donc on appelle α et β les projections de M sur Ox et Oy, la droite $\alpha\beta$ est la trace, dans le plan xy, du plan tangent au paraboloïde au point qui se projette en M sur xy.

Soient encore R le point où la tangente en P au cercle C rencontre l'axe Ox, RS la parallèle menée par R à Oy; cette dernière droite sera la trace du plan tangent au cylindre le long de la génératrice qui se projette suivant $M\alpha$. Il en résulte que le point d'intersection Q des droites $\alpha\beta$ et RS est un point de la tangente en M à la conchoïde. On est donc ainsi conduit à la construction suivante de la tangente à la courbe au point M.

On projette M *en* α *et* β *sur* Ox *et* Oy; *la tangente à* C *en* P *coupe* OA *en* R; *l'intersection de* $\alpha\beta$ *avec la parallèle menée par* R *à* Oy *est un point de la tangente en* M *à la courbe.*

Cette construction peut conduire à des tracés sortant des limites de la figure. Nous allons indiquer une seconde méthode pour la construction de la tangente, qui renfermera les tracés à l'intérieur du cercle C.

La droite symétrique de la tangente par rapport à $M\alpha$ a pour équation

$$y - a\,\text{tang}\,\varphi = \frac{1}{\sin\varphi\cos^2\varphi}(x - a\cos\varphi),$$

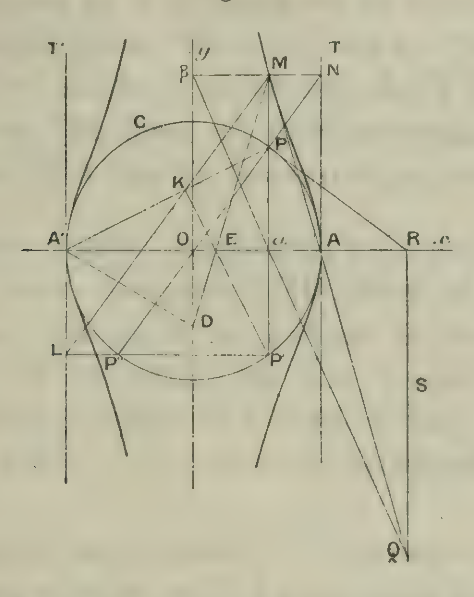
ou encore

$$y\sin\varphi\cos^2\varphi - x + a\cos^3\varphi = 0.$$

Elle coupe donc l'axe Oy en un point D tel que $OD = -a\cot\varphi$. On en déduit la construction suivante :

La perpendiculaire abaissée de A′ *sur le rayon* OP *rencontre* O*y en* D ; *la droite* MD *coupe* OA *en* E ;

Fig. 1.



le symétrique de E *par rapport à* α *est un point de la tangente en* M.

Il est à remarquer que le point E pourrait aussi s'obtenir en projetant d'abord α sur OP et en projetant ensuite le point obtenu sur AO.

2. Soient maintenant A′T′ la tangente en A′ au cercle C, P′ le symétrique de P par rapport à OA, L et K les projections de P′ sur A′T′ et sur A′P ; nous allons montrer que LK passe par M. La droite P′L rencontre C au point P″ diamétralement opposé à P; l'égalité d'angles

$$PP''P' = PA'P' = KLP'$$

montre d'abord que LK est parallèle à P″N ; on a ensuite

$$LP'' = MN;$$

LK passe donc par M. On arrive ainsi à cette nouvelle définition de la conchoïde de Külp :

On considère la tangente A′T′ *en un point fixe* A′ *d'un cercle* C *et une corde* PP′ *se déplaçant parallèlement à* A′T′; *la conchoïde de Külp est le lieu des points d'intersection de la corde* PP′ *avec la droite qui joint les projections de* P′ *sur* A′T′ *et sur* A′P.

La démonstration précédente montre encore que la portion de la droite MKL comprise entre AA′ et A′L est constante et égale à a. Il résulte de là que *la parallèle menée par un point de la courbe au rayon* OP, *qui a servi à le définir, enveloppe une astroïde régulière.*

3. *Généralisation.* — Remplaçons le cercle C par une ellipse d'axes $2a$, $2b$, AA′ étant le grand axe. Le point M décrit alors une courbe qui peut se déduire de la conchoïde de Külp par projection ; elle a pour équation

$$x^2y^2 = b^2(a^2 - x^2). \tag{1}$$

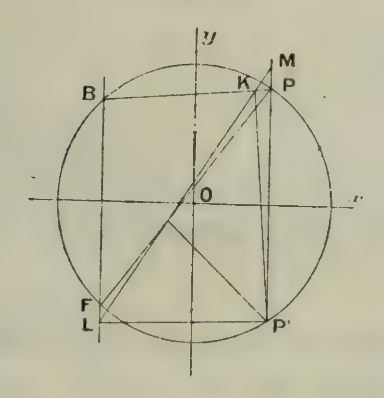
Elle est la projection sur le plan xy de la courbe d'intersection du cylindre de rayon a de révolution autour de Oy et du paraboloïde hyperbolique $xy = bz$. La première construction de la tangente (§ 1) lui est donc applicable.

On pourrait chercher à généraliser la conchoïde de Külp en remplaçant, dans la définition trouvée au paragraphe 2, la tangente A′T′ par une sécante parallèle BF, la droite LK devenant la droite de Simson de P′ par rapport au triangle BFP (*fig.* 2).

Il est intéressant d'observer que cette construction conduit encore aux quartiques (1).

La droite de Simson de P′ par rapport au triangle BFP est parallèle à PP″. Si donc on désigne par b la dis-

Fig. 2.



tance de O à BD, les coordonnées de L sont

$$(-b, -a\sin\varphi)$$

et la droite de Simson de P′ a pour équation

(2) $$y + a\sin\varphi = (x+b)\operatorname{tang}\varphi.$$

Celle de PP′ s'écrit

(3) $$x = a\cos\varphi.$$

L'équation (2) devient ainsi

(4) $$y = b\operatorname{tang}\varphi.$$

L'élimination de φ entre (3) et (4) donne pour le lieu cherché

$$x^2y^2 = b^2(a^2 - x^2);$$

c'est l'équation (1).

Ainsi les conchoïdes de Külp généralisées (1) admettent la définition suivante :

Étant données une corde fixe BF *d'un cercle* C *et une corde* PP′ *se déplaçant parallèlement à* BF,

la conchoïde de Külp généralisée est le lieu du point de rencontre de PP′ *avec la droite de Simson de* P′ *par rapport au triangle* BFP.

4. Le segment de cette droite compris entre BF et OA est encore constant et égal à a. On en déduit ce théorème qui présente une certaine analogie avec le théorème de Steiner concernant l'enveloppe des droites de Simson d'un point variable du cercle circonscrit à un triangle :

Si deux sommets d'un triangle sont fixes et si le troisième se meut sur un cercle C *passant par ces points, l'enveloppe de la droite de Simson du point où la parallèle menée par le sommet variable au côté fixe rencontre le cercle est une hypocycloïde à quatre rebroussements.*

[L[1]19d]

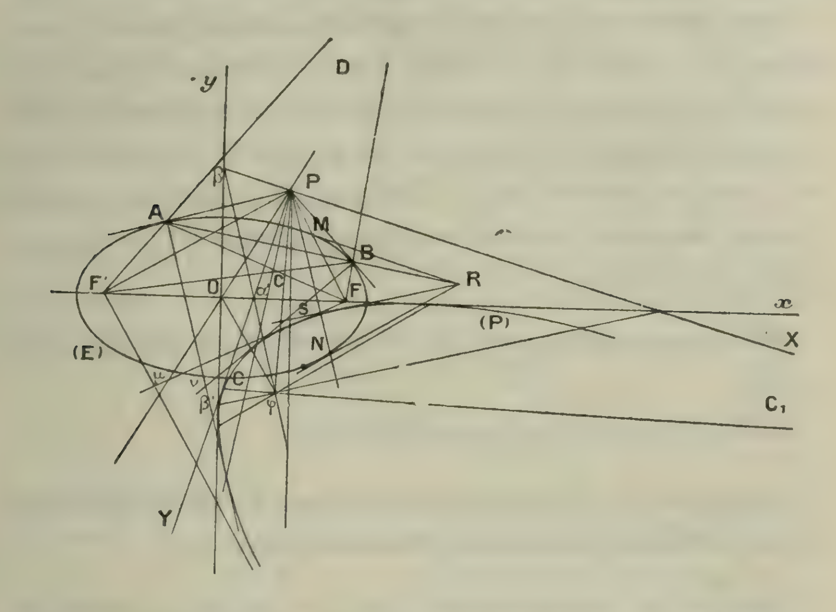
SUR LA PARABOLE DE CHASLES OU PARABOLE DES DIX-HUIT DROITES;

Par M. F. BALITRAND.

Pour résoudre le problème qui consiste à mener, par un point donné, des normales à une conique donnée, Chasles a proposé de remplacer la classique hyperbole d'Apollonius par une parabole (voir *Sections coniques*, p. 145). La définition de cette parabole est la suivante :

Étant donnés une ellipse (E) de centre O, d'axes Ox et Oy, de foyers F et F′, et un point P de son plan, menons par le

point P une sécante, puis par les points M et N où elle rencontre l'ellipse les tangentes qui se coupent en R. Du point R



abaissons la perpendiculaire RS sur la sécante PMN; l'enveloppe de cette perpendiculaire est la parabole (P).

On peut déterminer *a priori* au moins dix-huit tangentes remarquables de cette courbe; d'où le nom de parabole de Chasles ou des dix-huit droites. On en trouve immédiatement quatorze, savoir :

Les quatre tangentes aux pieds des normales issues de P;

Les axes Ox et Oy;

Les normales aux points de contact, A et B, des tangentes PA, PB, issues de P;

La droite AB et la perpendiculaire élevée au milieu de AB ou médiatrice de AB;

Les perpendiculaires élevées en F et F' aux rayons vecteurs PF et PF';

Les bissectrices PX et PY de l'angle PAB (ou PFF').

Les points de contact C et C_1 de la parabole (P),

avec PX et PY, sont les centres de courbure des deux coniques homofocales à (E) qui se croisent en P.

Pour trouver d'autres tangentes remarquables joignons FA, FB; F′A, F′B. Nous obtenons ainsi un quadrilatère complet dont les quatre côtés touchent un cercle de centre P. Par suite, les points C et D sont sur une conique homofocale à l'ellipse (E). D'où il résulte comme tangentes nouvelles à la parabole (P) les quatre droites suivantes :

Les perpendiculaires en C et D aux droites PC et PD;

La diagonale CD et sa médiatrice.

L'examen de la figure formée par le point P et les points ABCDFF′ donne le théorème suivant :

Lorsqu'un quadrilatère est circonscriptible à un cercle, les perpendiculaires élevées par les sommets et les points de concours des côtés opposés aux rayons qui joignent ces points au centre du cercle inscrit sont six tangentes d'une parabole.

La connaissance d'un nombre aussi considérable de tangentes remarquables de la parabole (P) entraîne nécessairement beaucoup de théorèmes. Nous allons en énumérer quelques-uns :

La directrice de la parabole (P) est la droite PO et son foyer est facile à déterminer. A cet effet, désignons par α et β, α' et β', les points de rencontre de PX et PY avec Ox et Oy. Les couples de droites PX et PY, Ox et Oy, constituent deux coniques ayant un double contact avec la parabole (P). D'après un théorème connu, leurs cordes communes passent par le point de rencontre des deux cordes de contact et sont conjuguées harmoniques par rapport à ces cordes.

Autrement dit, $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$ se coupent au foyer φ de la parabole (P), et comme elles sont rectangulaires (la droite $\alpha'\beta$ est une hauteur du triangle $\alpha\beta\beta'$), ce sont les bissectrices de l'angle formé par les cordes de contact.

Observons enfin que la parabole (P) ne change pas si l'on remplace l'ellipse (E) par une conique homofocale. On peut donc dire :

Si d'un point P l'on mène des normales à une famille de coniques homofocales, les tangentes aux pieds de ces normales enveloppent une parabole (P) qui touche les axes Ox et Oy et qui a pour directrice la droite PO.

Et aussi :

L'enveloppe des polaires d'un point fixe P par rapport à un système de coniques homofocales est une parabole tangente aux axes Ox et Oy et ayant pour directrice la droite PO.

Et encore :

Si d'un point fixe P on mène les tangentes aux coniques d'un système homofocal, les normales aux points de contact enveloppent une parabole tangente aux axes Ox et Oy et ayant pour directrice la droite PO.

La parabole de Chasles ne change pas davantage si l'on remplace l'ellipse (E) par une autre conique tangente en A et B aux droites PA et PB, puisque les normales en A et B, la droite AB et sa médiatrice, les bissectrices PX et PY de l'angle en P, sont six tangentes fixes de cette parabole. On peut donc encore la définir :

1° Comme l'enveloppe des axes des coniques tangentes à deux droites données en deux points donnés;

2° Comme l'enveloppe des tangentes aux pieds des normales issues du point P aux coniques de ce système;

3° Comme l'enveloppe des perpendiculaires menées aux

rayons vecteurs qui joignent le point P aux foyers des coniques de ce système.

Le point de contact d'une tangente avec la parabole (P) est facile à construire; soit au moyen du théorème de Steiner : *Le point de rencontre des hauteurs de tout triangle circonscrit à une parabole est sur la directrice;* soit au moyen du théorème de Brianchon. Nous ne nous y arrêterons pas ici.

On sait qu'il existe une conique, et une seule, homofocale à (E) et touchant la droite AB. Mais, puisque AB est une tangente de la parabole de Chasles, le point de contact est le pied d'une normale issue de P. Autrement dit, la normale au point de contact et les tangentes en A et B à l'ellipse (E) concourent en un point P. Par suite :

Étant données deux ellipses homofocales, si par un point de l'ellipse intérieure on lui mène une tangente qui coupe l'ellipse extérieure en A et B, la normale au point de contact et les tangentes à l'ellipse extérieure en A et B concourent en un point P.

Le point P est le pôle de AB par rapport à l'ellipse (E); donc l'on peut encore dire :

Le lieu des pôles d'une droite par rapport aux coniques d'un système homofocal est une droite normale à la droite donnée au point où elle est touchée par la conique du système qui lui est tangente.

Sous cette forme le théorème est dû à Chasles.

Désignons par C et C_1 les centres de courbure des deux coniques homofocales à (E) qui se croisent en P. La parabole de Chasles touche en ces points les droites PX et PY, et le foyer φ de la parabole s'obtient en projetant le point P sur la droite CC_1. Menons maintenant les normales à l'ellipse (E) aux points A

et B et soit ν leur point de rencontre. Les droites νA et νB sont des tangentes à la parabole (P). Pour obtenir les points de contact appliquons le théorème de Steiner. On voit ainsi qu'ils sont à l'intersection de νA et νB avec la perpendiculaire abaissée de P sur AB. La droite qui les joint, c'est-à-dire la polaire du point ν par rapport à la parabole de Chasles, passe par le point P. Autrement dit νP est conjuguée harmonique de $\nu\varphi$ par rapport à νA et νB, car le point ν est sur la droite $\nu\varphi CC_1$.

En effet, le cercle νABP, de diamètre νP, circonscrit à un triangle circonscrit à (P) passe par son foyer φ; donc le point ν se trouve sur CC_1.

Appelons μ le point de rencontre des perpendiculaires élevées en F et F' à PF et PF'. Le cercle $\mu FF'P$ passe par le foyer φ et le point μ, comme le point ν, se trouve sur la droite CC_1. Les points de contact de μF et $\mu F'$ avec (P) s'obtiennent par le théorème de Steiner et l'on voit qu'ils sont sur la perpendiculaire abaissée de P sur FF'; c'est-à-dire que la polaire de μ par rapport à (P) passe par P et par suite le faisceau $\mu FPF'\varphi$ est harmonique. Ce qui précède se résume dans les propositions suivantes :

Si d'un point fixe P l'on mène les tangentes aux coniques d'un système homofocal, puis les normales aux points de contact, le lieu du point de rencontre, ν, de ces normales est une droite. Cette droite passe par les centres de courbure C et C_1 des deux coniques du système qui se croisent en P. Les deux normales, la droite νP et la droite νCC_1 forment un faisceau harmonique.

Les perpendiculaires élevées en F et F' aux droites PF et PF' se coupent en un point μ situé sur la droite CC_1. Les deux perpendiculaires, la droite μP et la droite μCC_1 forment un faisceau harmonique.

Supposons maintenant que le point P vienne sur

l'ellipse E; ce qui, au fond, ne particularise rien, puisqu'il y a toujours une ellipse homofocale à (E) passant en P. La parabole de Chasles est alors l'enveloppe des perpendiculaires abaissées des différents points de la tangente en P sur les polaires de ces points. Elle touche la normale à l'ellipse (E) en P au centre de courbure correspondant et la tangente au centre de courbure de l'hyperbole homofocale à (E) qui passe au point P.

D'après sa définition même, on voit que le point de contact de la parabole de Chasles avec la tangente est le pôle, par rapport à l'ellipse (E), de la normale en P, c'est-à-dire le centre de courbure de l'hyperbole homofocale. On a donc ce théorème (Salmon, *Sections coniques*, p. 642) :

Lorsque deux coniques homofocales se coupent au point P, *le centre de courbure de l'une au point* P *est le pôle, par rapport à l'autre, de la tangente à la première au point* P.

Les droites μF, $\mu F'$ rencontrent la tangente en P sur les directrices correspondantes et de plus, comme on l'a vu plus haut, le faisceau $\mu FF'PC_1$ est harmonique. Donc :

Le centre de courbure C_1 de l'hyperbole homofocale à (E) qui passe en P, est le conjugué harmonique du point P par rapport aux points où la tangente en P coupe les directrices de l'ellipse (E).

On sait qu'une tangente variable d'une parabole découpe sur deux tangentes fixes de cette parabole des segments proportionnels. Ainsi les tangentes à la parabole de Chasles μF, $\mu F'$ et Oy, qui découpent sur l'axe Ox des segments égaux, découperont également

des segments égaux sur une autre tangente quelconque de cette parabole; par exemple sur la normale et sur la tangente en P à l'ellipse (E). Donc :

Étant donné un point P d'une ellipse (E), les perpendiculaires aux rayons vecteurs PF et PF' découpent respectivement deux segments sur la normale et la tangente en P à l'ellipse (E). Le lieu du milieu de ces segments, lorsque le point P varie, est le petit axe de l'ellipse (E).

Revenons au cas où P est en dehors de l'ellipse (E). Les normales en A et B à cette ellipse et la médiatrice de AB sont trois tangentes de la parabole de Chasles. Ces trois tangentes déterminent sur une autre tangente quelconque de la parabole, par exemple sur les axes Ox et Oy, des segments égaux. Donc :

Étant donnés deux points quelconques A et B d'une conique, si en ces points l'on mène les normales à la conique, ces normales déterminent un segment sur un axe de symétrie quelconque de la conique; la droite menée par le milieu de la corde AB perpendiculairement à cette corde passe par le milieu de ces segments.

Joignons un point quelconque M de l'ellipse (E) aux points A et B et menons les normales à cette ellipse aux points M, A et B, ainsi que les médiatrices des cordes MA et MB. D'après le théorème précédent la médiatrice de MA passe par le milieu du segment déterminé sur Ox par les normales en M et en A; de même la médiatrice de MB passe par le milieu du segment déterminé par les normales en M et en B. Les deux médiatrices déterminent donc, sur Ox, un segment égal à la moitié de celui découpé, sur le même axe, par les normales en A et B. Il est donc constant lorsque M varie sur (E). Ainsi :

Étant donnés sur une conique deux points fixes A et B et

un point M mobile sur cette conique; si aux points milieux des cordes MA et MB on élève des perpendiculaires à ces cordes, elles déterminent, sur un axe quelconque de la conique, un segment de longueur constante, quand M décrit la conique.

Ces deux derniers théorèmes sont dus à Laguerre.

[O7a]

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DE L'ESPACE RÉGLÉ;

PAR M. GASTON COTTY.

Indépendamment de l'intérêt que présente toute étude de Géométrie au point de vue des propriétés de l'espace qu'elle nous révèle, une telle étude peut s'imposer par le seul fait qu'elle est susceptible de donner une représentation concrète, simple et commode d'une théorie d'analyse, de mécanique ou même d'arithmétique transcendante. Les correspondances entre êtres algébriques et êtres géométriques abondent dans toutes les branches des mathématiques; lors même qu'elles ne constituent pas un moyen de découverte, elles sont cependant fort utiles en rendant le plus souvent intuitifs tout un ensemble de résultats assez difficiles à établir analytiquement et en permettant de rattacher les unes aux autres certaines propositions dont les rapports n'apparaissaient pas autrement.

La géométrie réglée a été fréquemment utilisée pour de telles représentations. Dans l'étude des fonctions abéliennes, on est amené à considérer une géométrie réglée un peu spéciale, dans laquelle on distingue les

éléments de l'espace jouissant de certaines propriétés arithmétiques. A quelques propositions très simples de cette *géométrie réglée arithmétique* on peut rattacher un ensemble considérable de propositions relatives aux fonctions abéliennes et à leurs transformations ainsi qu'à la théorie des nombres algébriques et des formes quadratiques; cela seul suffirait à justifier son étude. En outre, comme on le verra dans cette Note, où nous nous bornerons à énoncer une seule proposition de cette géométrie et à en signaler quelques conséquences immédiates, on est conduit à des résultats intéressants en eux-mêmes; quelques-uns sont probablement nouveaux, et si leur intérêt apparaît surtout lorsqu'on les envisage au point de vue des fonctions et des formes abéliennes, ils sont cependant assez curieux et tout au moins inattendus.

I.

1. Considérons un espace ordinaire dans lequel les coordonnées tétraédriques ou homogènes d'un point sont x_0, x_1, x_2, x_3. D'une façon générale, on définit une droite dans un tel espace à l'aide de six coordonnées homogènes liées par une relation quadratique; le système des coordonnées dépend de l'expression de cette *forme fondamentale* à six variables. Dans ce qui suit, nous adopterons la forme de Plücker et nous définirons une droite (d) par ses six coordonnées pluckériennes p_{ik}: p_{01}, p_{23}, p_{02}, p_{31}, p_{03}, p_{12} liées par la relation

$$\Phi(p_{ik}) = p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0.$$

Il serait aisé de reprendre les raisonnements avec d'autres formes fondamentales et de voir l'importance que présente ce point de vue.

Dans ces conditions, les coordonnées x_i de tout

point de la droite (d) satisfont aux équations

$$(1)\quad \begin{cases} p_{01}x_1 + p_{02}x_2 + p_{03}x_3 = 0, \\ p_{10}x_0 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3 = 0, \\ p_{20}x_0 + p_{21}x_1 + p_{23}x_3 = 0, \\ p_{30}x_0 + p_{31}x_1 + p_{32}x_2 = 0. \end{cases}$$

2. Si l'on effectue dans l'espace considéré une substitution homographique ponctuelle :

$$(S)\quad \begin{cases} x_0 = a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3, \\ x_1 = b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3, \\ x_2 = c_0X_0 + c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3, \\ x_3 = d_0X_0 + d_1X_1 + d_2X_2 + d_3X_3, \end{cases}$$

la droite (d) se trouve changée en une autre droite (D) de coordonnées pluckériennes P_{ik}. Cherchons les relations qui existent entre les quantités p_{ik} et P_{ik}, en nous attachant plus particulièrement à l'étude de ces relations, dans le cas où les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i de la substitution (S) sont des entiers, les coordonnées p_{ik} étant elles-mêmes entières au sens ordinaire ou même dans un corps algébrique quelconque.

Pour trouver l'expression des quantités P_{ik} en fonction des p_{ik}, il suffit de remplacer dans les équations (1) les x_i par leurs expressions en fonction des X_i, ce qui nous conduit aux équations suivantes de la droite (D)

$$(2)\quad \begin{cases} \sum_{i=0}^{3}(b_ip_{01} + c_ip_{02} + d_ip_{03})X_i = 0, \\ \sum_{i=0}^{3}(a_ip_{10} + c_ip_{12} + d_ip_{13})X_i = 0, \\ \sum_{i=0}^{3}(a_ip_{20} + b_ip_{21} + d_ip_{23})X_i = 0, \\ \sum_{i=0}^{3}(a_ip_{30} + b_ip_{31} + c_ip_{32})X_i = 0. \end{cases}$$

Prenons deux quelconques de ces équations, éliminons successivement entre elles X_0, X_1, X_2 et X_3; les équations de (D) se trouvent mises sous la forme

$$
(3)\quad \begin{cases}
P_{01}X_1 + P_{02}X_2 + P_{03}X_3 = 0, \\
P_{10}X_0 + P_{12}X_2 + P_{13}X_3 = 0, \\
P_{20}X_0 + P_{21}X_1 + P_{23}X_3 = 0, \\
P_{30}X_0 + P_{31}X_1 + P_{32}X_2 = 0,
\end{cases}
$$

et l'on trouve, en posant pour abréger

$$(mn)_{ij} = m_i n_j - m_j n_i,$$

les expressions suivantes des P_{ik} :

$$P_{01} = (ab)_{01}p_{01} + (cd)_{01}p_{23} + (ac)_{01}p_{02} + (db)_{01}p_{31} + (ad)_{01}p_{03} + (bc)_{01}p_{12},$$
$$P_{23} = (ab)_{23}p_{01} + (cd)_{23}p_{23} + (ac)_{23}p_{02} + (db)_{23}p_{31} + (ad)_{23}p_{03} + (bc)_{23}p_{12},$$
$$P_{02} = (ab)_{02}p_{01} + (cd)_{02}p_{23} + (ac)_{02}p_{02} + (db)_{02}p_{31} + (ad)_{02}p_{03} + (bc)_{02}p_{12},$$
$$P_{31} = (ab)_{31}p_{01} + (cd)_{31}p_{23} + (ac)_{31}p_{02} + (db)_{31}p_{31} + (ad)_{31}p_{03} + (bc)_{31}p_{12},$$
$$P_{02} = (ab)_{03}p_{01} + (cd)_{03}p_{23} + (ac)_{03}p_{02} + (db)_{03}p_{31} + (ad)_{03}p_{03} + (bc)_{03}p_{12},$$
$$P_{12} = (ab)_{12}p_{01} + (cd)_{12}p_{23} + (ac)_{12}p_{02} + (db)_{12}p_{31} + (ad)_{12}p_{03} + (bc)_{12}p_{12}.$$

Dans le cas où la substitution (S) est une substitution *arithmétique*, c'est-à-dire dans le cas où les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i sont entiers, les coefficients figurant dans les relations (R_1) sont également entiers. Si les quantités p_{ik} sont entières dans un corps quadratique quelconque, il en est de même des P_{ik}. En particulier, si la droite (d) a ses coordonnées pluckériennes rationnelles, auquel cas on peut toujours les supposer entières, sa transformée (D) jouit de la même propriété. De telles droites à coordonnées rationnelles seront dites *droites arithmétiques*.

3. Les coordonnées p_{ik} de (d) s'expriment en fonction des coordonnées P_{ik} de (D) par des formules absolument analogues aux relations (R_1).

Pour le voir, il est assez pénible de tirer les p_{ik} des formules (R_1) et de constater les simplifications qui se produisent dans le calcul des coefficients. Aussi, procéderons-nous d'une manière indirecte mais plus rapide en faisant appel à la représentation tangentielle de la droite.

Soient u_0, u_1, u_2, u_3 les coordonnées tangentielles d'un plan quelconque passant par la droite (d); on sait que ces quantités u_i vérifient les équations

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\varpi_{01}u_1+\varpi_{02}u_2+\varpi_{03}u_3=0,\\ &\varpi_{10}u_0+\varpi_{12}u_2+\varpi_{13}u_3=0,\\ &\varpi_{20}u_0+\varpi_{21}u_1+\varpi_{23}u_3=0,\\ &\varpi_{30}u_0+\varpi_{31}u_1+\varpi_{32}u_2=0,\end{aligned}\right.$$

les nombres ϖ_{ik} étant les coordonnées pluckériennes tangentielles de (d); ils sont, comme on sait, liés aux p_{ik} par ces relations

$$(5)\quad \frac{\varpi_{01}}{p_{23}}=\frac{\varpi_{23}}{p_{01}}=\frac{\varpi_{02}}{p_{31}}=\frac{\varpi_{31}}{p_{02}}=\frac{\varpi_{03}}{p_{12}}=\frac{\varpi_{12}}{p_{03}}.$$

A la substitution (S) effectuée sur les x_i correspond la substitution (Σ) effectuée sur les u_i :

$$(\Sigma)\quad \left\{\begin{aligned} U_0&=a_0u_0+b_0u_1+c_0u_2+d_0u_3,\\ U_1&=a_1u_0+b_1u_1+c_1u_3+d_1u_3,\\ U_2&=a_2u_0+b_2u_1+c_2u_2+d_2u_3,\\ U_3&=a_3u_0+b_3u_1+c_3u_2+d_3u_3.\end{aligned}\right.$$

Soient Π_{ik} les coordonnées pluckériennes tangentielles de (D). La substitution (Σ) faisant passer des U_i aux u_i, tandis que (S) conduisait des x_i aux X_i, le calcul précédent qui nous a fourni les relations (R_1) nous fournit, sans nouveau calcul, les expressions des ϖ_{ik} en fonction des Π_{ik}, par le simple remplacement dans (R_1) de p_{ik} par Π_{ik}, de P_{ik} par ϖ_{ik}, et de chaque

quantité a_i, b_i, c_i, d_i par l'élément qui occupe dans le déterminant de (Σ) la place qu'elle occupe dans le déterminant de (S). Il est alors bien facile de remplacer les ϖ_{ik} et Π_{ik} par les p_{ik} et P_{ik} qui leurs sont égaux et d'écrire les expressions des p_{ik} en fonction des P_{ik} :

$$(R_2)\begin{cases} p_{01} = (cd)_{23}P_{01} + (cd)_{01}P_{23} + (cd)_{31}P_{02} + (cd)_{02}P_{31} + (cd)_{12}P_{03} + (cd)_{03}P_{12}, \\ p_{23} = (ab)_{23}P_{01} + (ab)_{01}P_{23} + (ab)_{31}P_{02} + (ab)_{02}P_{31} + (ab)_{12}P_{03} + (ab)_{03}P_{12}, \\ p_{02} = (db)_{23}P_{01} + (db)_{01}P_{23} + (db)_{31}P_{02} + (db)_{02}P_{31} + (db)_{12}P_{03} + (db)_{03}P_{12}, \\ p_{31} = (ac)_{23}P_{01} + (ac)_{01}P_{23} + (ac)_{31}P_{02} + (ac)_{02}P_{31} + (ac)_{12}P_{03} + (ac)_{03}P_{12}, \\ p_{03} = (bc)_{23}P_{01} + (bc)_{01}P_{23} + (bc)_{31}P_{02} + (bc)_{02}P_{31} + (bc)_{12}P_{03} + (bc)_{03}P_{12}, \\ p_{12} = (ad)_{23}P_{01} + (ad)_{01}P_{23} + (ad)_{31}P_{02} + (ad)_{02}P_{31} + (ad)_{12}P_{03} + (ad)_{03}P_{12}. \end{cases}$$

Ces formules se prêtent aux mêmes remarques de caractère arithmétique que les formules (R_1).

4. En réalité, si l'on tirait les quantités p_{ik} du système d'équations linéaires (R_1) on n'obtiendrait pas exactement les relations (R_2) mais ces mêmes équations dont tous les coefficients $(mn)_{ij}$ auraient été multipliés par Δ^2, en supposant égal à Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

de la substitution (S). Sous une autre forme, les seconds membres des six équations (R_2) ne sont pas égaux aux nombres p_{ik} tirés de (R_1), mais aux nombres $\frac{1}{\Delta^2}p_{ik}$. Les six coordonnées pluckériennes d'une droite n'étant, en général, définies qu'à un facteur près, on pourra regarder comme entièrement équivalents les systèmes (R_1) et (R_2).

Cependant, il nous arrivera de définir d'une façon

précise les *six coordonnées pluckériennes réduites* d'une *droite arithmétique* en assujettissant les six nombres p_{ik} à être six entiers premiers entre eux dans l'ensemble, satisfaisant bien entendu, à la relation fondamentale

$$\Phi(p_{ik}) = p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0.$$

Ces coordonnées ne sont ainsi définies qu'au signe près, cette ambiguïté de signe serait bien facile à lever par une convention, par exemple celle-ci : p_{01} positif ou nul; si p_{01} est nul, p_{23} est positif ou nul; si p_{01} et p_{23} sont nuls, p_{02} est positif ou nul; si p_{01}, p_{23} et p_{02} sont nuls, p_{31} est positif ou nul, et ainsi de suite...; si p_{01}, p_{23}, p_{02}, p_{31} et p_{03} sont nuls, p_{12} est positif.

A toute représentation propre de zéro (satisfaisant à la convention de signe) par la forme $\Phi(p_{ik})$ correspond une droite arithmétique de coordonnées réduites p_{ik}, et à toute droite arithmétique correspond une et une seule représentation propre de zéro par Φ (1).

Avec ces définitions, les systèmes (R_1) et (R_2) ne donnent pas d'une façon générale les relations qui existent entre les coordonnées pluckériennes réduites d'une droite arithmétique (d) et celles de la droite (D) transformée de (d) par une substitution (S) à coefficients entiers. Mais lorsqu'on ne considère que des substitutions (S) de degré Δ égal à l'unité positive ou négative, ces deux systèmes d'équations conviennent aux coordonnées réduites et sont algébriquement équivalents.

(1) Dans la suite, il serait entendu qu'on ne considère jamais que des représentations par la forme Φ, qui satisfont à la convention de signe faite sur les p_{ik}, et cette question de signe ne présentant pratiquement aucun intérêt, nous la laisserons de côté.

En effet, on peut considérer les relations de chaque système comme définissant une substitution à six variables et l'on vérifie aisément que les déterminants de (R_1) et (R_2) sont égaux à Δ^3. Si Δ est égal à $\varepsilon = \pm 1$, ces deux déterminants sont égaux à ε, et il est immédiat que : 1° les deux systèmes (R_1) et (R_2) sont entièrement équivalents; 2° les deux ensembles de six nombres p_{ik} et P_{ik} ont même plus grand commun diviseur et (R_1) et (R_2) donnent les formules de transformation des coordonnées pluckériennes réduites pour les droites arithmétiques.

5. Il est bien facile, d'après ce qui précède, de transporter en géométrie réglée les notions d'équivalence algébrique ou arithmétique.

Deux droites (d) et (D) sont *arithmétiquement équivalentes* si l'une est la transformée de l'autre par une substitution arithmétique (S) de degré $\Delta = \pm 1$, l'équivalence étant *propre* si $\Delta = +1$, *impropre* si $\Delta = -1$. Il est inutile de préciser laquelle des deux droites est la transformée de l'autre dans une substitution arithmétique du premier degré, car il est bien évident que si (S) change (d) en (D), la substitution inverse (S^{-1}) est arithmétique et de degré ± 1 en même temps que (S), et change (D) en (d). Quant aux formules permettant de reconnaître l'équivalence de deux droites définies par leurs six coordonnées, ce sont celles que nous avons données plus haut.

Cette définition de l'équivalence s'étend immédiatement aux divers ensembles de droites (complexes, congruences, séries réglées, etc.).

Dans tout ce qui suit, lorsque nous dirons de deux systèmes réglés qu'ils sont *équivalents*, nous sous-entendrons qu'ils sont arithmétiquement équivalents.

Quand un ensemble de droites (E) sera le transformé d'un autre ensemble de droites (e) par une substitution (S) à coefficients entiers et de degré Δ différent de ± 1, (E) sera dit *équivalent* à (e) *dans une substitution de degré* Δ. Il est nécessaire de préciser dans quel sens a lieu cette équivalence spéciale.

On peut se proposer d'étudier les conditions nécessaires et suffisantes d'équivalence de certains ensembles de droites jouissant de propriétés arithmétiques spéciales. Le problème ainsi posé est très étendu, à cause de l'arbitraire que présente son énoncé. Nous traiterons complètement, dans la suite, l'équivalence des complexes linéaires à coefficients rationnels et nous en donnerons quelques applications.

II.

6. Le plus simple des systèmes réglés qu'on ait à considérer est le complexe linéaire, qui comprend comme cas particulier le complexe linéaire spécial, dont la considération revient à une nouvelle façon d'envisager la droite en la regardant comme axe d'un tel complexe.

Soit

$$(6) \qquad \Sigma a_{ik} p_{ik} = a_{01} p_{01} + a_{23} p_{23} + a_{02} p_{02} + a_{31} p_{31} + a_{03} p_{03} + a_{12} p_{12} = 0$$

l'équation d'un complexe linéaire (c). Nous étudierons principalement le cas des *complexes arithmétiques*, c'est-à-dire le cas où tous les coefficients a_{ik} sont rationnels. On peut les supposer entiers et premiers entre eux dans l'ensemble, ce qui permet de définir les *coefficients réduits* et l'*équation réduite* d'un complexe linéaire arithmétique. Ces coefficients réduits ne sont définis qu'au signe près; on lève cette ambi-

guïté de signe par une convention particulière, comme on l'a fait pour les coordonnées réduites des droites.

7. Une substitution (S) change le complexe linéaire (c) en un autre complexe linéaire (C) d'équation

$$(7) \qquad \Sigma A_{ik} P_{ik} = 0.$$

On obtient cette équation (7) en remplaçant dans l'équation (6) de (c) les quantités p_{ik} par leurs expressions en fonction des quantités P_{ik} données par les relations (R_2).

On trouve ainsi les expressions suivantes des coefficients A_{ik} de (C) en fonction des coefficients a_{ik} de (c) :

$$(R'_1) \left\{ \begin{aligned} A_{01} &= a_{01}(cd)_{23} + a_{23}(ab)_{23} + a_{02}(db)_{23} + a_{31}(ac)_{23} + a_{03}(bc)_{23} + a_{12}(ad)_{23}, \\ A_{23} &= a_{01}(cd)_{01} + a_{23}(ab)_{01} + a_{02}(db)_{01} + a_{31}(ac)_{01} + a_{03}(bc)_{01} + a_{12}(ad)_{01}, \\ A_{02} &= a_{01}(cd)_{31} + a_{23}(ab)_{31} + a_{02}(db)_{31} + a_{31}(ac)_{31} + a_{03}(bc)_{31} + a_{12}(ad)_{31}, \\ A_{31} &= a_{01}(cd)_{02} + a_{23}(ab)_{02} + a_{02}(db)_{02} + a_{31}(ac)_{02} + a_{03}(bc)_{02} + a_{12}(ad)_{02}, \\ A_{03} &= a_{01}(cd)_{12} + a_{23}(ab)_{12} + a_{02}(db)_{12} + a_{31}(ac)_{12} + a_{03}(bc)_{12} + a_{12}(ad)_{12}, \\ A_{12} &= a_{01}(cd)_{03} + a_{23}(ab)_{03} + a_{02}(db)_{03} + a_{31}(ac)_{03} + a_{03}(bc)_{03} + a_{12}(ad)_{03}, \end{aligned} \right.$$

En substituant de la même manière dans l'équation (7) de (C) aux p_{ik} leurs expressions en fonction des P_{ik}, tirées des relations (R_1) on exprime les coefficients a_{ik} de (c) en fonction des coefficients A_{ik} de (C) par les formules suivantes [1] :

$$(R'_2) \left\{ \begin{aligned} a_{01} &= A_{01}(ab)_{01} + A_{23}(ab)_{23} + A_{02}(ab)_{02} + A_{31}(ab)_{31} + A_{03}(ab)_{03} + A_{12}(ab)_{12}, \\ a_{23} &= A_{01}(cd)_{01} + A_{23}(cd)_{23} + A_{02}(cd)_{02} + A_{31}(cd)_{31} + A_{03}(cd)_{03} + A_{12}(cd)_{12}, \\ a_{02} &= A_{01}(ac)_{01} + A_{23}(ac)_{23} + A_{02}(ac)_{02} + A_{31}(ac)_{31} + A_{03}(ac)_{03} + A_{12}(ac)_{12}, \\ a_{31} &= A_{01}(db)_{01} + A_{23}(db)_{23} + A_{02}(db)_{02} + A_{31}(db)_{31} + A_{03}(db)_{03} + A_{12}(db)_{12}, \\ a_{03} &= A_{01}(ad)_{01} + A_{23}(ad)_{23} + A_{02}(ad)_{02} + A_{31}(ad)_{31} + A_{03}(ad)_{03} + A_{12}(ad)_{12}, \\ a_{12} &= A_{01}(bc)_{01} + A_{23}(bc)_{23} + A_{02}(bc)_{02} + A_{31}(bc)_{31} + A_{03}(bc)_{03} + A_{12}(bc)_{12}. \end{aligned} \right.$$

---

[1] Si l'on avait écrit l'équation d'un complexe linéaire sous la

8. Il importe de remarquer que, dans tout ce qui précède, nous considérons les six coefficients d'un complexe linéaire comme six nombres définis à un facteur près et, de même que les systèmes (R_1) et (R_2), les systèmes (R'_1) et (R'_2) ne sont pas entièrement équivalents. Mais on peut, en considérant d'une part des complexes arithmétiques dont l'équation est supposée réduite, d'autre part des substitutions (S) à coefficients entiers et de degré ± 1, préciser les résultats précédents.

Les déterminants de (R'_1) et (R'_2) considérées comme des substitutions à six variables (comparer § 4) sont égaux aux déterminants de (R_1) et (R_2) et égaux à Δ^3, si (S) est de degré Δ. Si l'on tirait des relations (R'_1) les a_{ik} en fonction des A_{ik}, on ne trouverait pas exactement les relations (R'_2), mais ces six équations, après multiplication des seconds membres par Δ^2. Ce qui suit en découle immédiatement. Si (c) est un complexe linéaire arithmétique de coefficients réduits a_{ik}, (C) est aussi un complexe arithmétique; soient a_{ik} ses coefficients réduits. Si l'on ne considère que des substitutions arithmétiques (S) de degré ± 1, les deux systèmes de formules (R'_1) et (R'_2) sont entièrement équivalents et donnent les équations de transformation des coefficients réduits a_{ik} et A_{ik} des complexes arithmétiques.

9. Si le complexe (c) est spécial, c'est-à-dire si l'on a

$$a_{01}a_{23}+a_{02}a_{31}+a_{03}a_{12}=0,$$

---

forme

$$a_{23}p_{01}+a_{01}p_{23}+a_{31}p_{02}+a_{02}p_{31}+a_{12}p_{03}+a_{03}p_{12}=0$$

les systèmes (R'_1) et (R'_2) auraient été identiques à (R_2) et (R_1).

(C) l'est également ; on vérifie aisément qu'en vertu des relations (R'_1) ou (R'_2), la condition précédente entraîne

$$A_{01}A_{23} - A_{02}A_{31} + A_{03}A_{12} = 0.$$

Les coordonnées pluckériennes p_{ik} et P_{ik} des axes (d) et (D) de ces deux complexes spéciaux sont :

$$p_{01} = a_{23}, \quad p_{23} = a_{01}, \quad p_{02} = a_{31},$$
$$p_{31} = a_{02}, \quad p_{03} = a_{12}, \quad p_{12} = a_{03}$$

et

$$P_{01} = A_{23}, \quad P_{23} = A_{01}, \quad P_{02} = A_{31},$$
$$P_{31} = A_{02}, \quad P_{03} = A_{12}, \quad P_{12} = A_{03}.$$

Les systèmes (R'_1) et (R'_2) se réduisent, dans ce cas particulier, aux systèmes (R_1) et (R_2) donnant les formules de transformation des droites, qu'on envisage ainsi comme axes des complexes spéciaux.

10. Plus généralement, cherchons les relations qui existent entre les *invariants* des complexes (c) et (C). Considérons les deux quantités

$$\mathfrak{I}(c) = a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12},$$
$$\mathfrak{I}(C) = A_{01}A_{23} + A_{02}A_{31} + A_{03}A_{12},$$

qui sont, d'après Klein, les invariants de (c) et (C). Ces invariants ne sont bien définis qu'autant que les coefficients a_{ik} et A_{ik} le sont eux-mêmes, mais nous pourrons parler avec précision de l'invariant d'un complexe arithmétique, étant entendu que les coefficients figurant dans $\mathfrak{I}$ sont les coefficients réduits (l'ambiguïté de signe de ces coefficients n'intervenant pas dans la valeur de l'invariant). Tout complexe arithmétique a ainsi un invariant bien déterminé qui est un nombre entier quelconque.

Les a_{ik} étant supposés donnés, si les A_{ik} sont ceux

que définissent les formules (R'_1), on trouve

$$\mathfrak{J}(C) = \Delta\mathfrak{J}(c),$$

mais si l'on suppose, au contraire, les A_{ik} donnés et les a_{ik} tirés de (R'_2), on trouve que c'est $\mathfrak{J}(c)$ qui est égal à $\Delta\mathfrak{J}(C)$.

Dans tous les cas, si deux complexes arithmétiques sont arithmétiquement équivalents, ils ont même invariant $\mathfrak{J}$, cette proposition ayant, comme nous l'avons montré, un sens très précis. Nous verrons que, réciproquement, deux complexes linéaires arithmétiques de même invariant sont équivalents.

III.

11. Nous démontrerons dans ce Chapitre un certain nombre de propositions qui renferment toute la théorie de l'équivalence des complexes linéaires arithmétiques.

Pour ne pas être obligé de présenter, pour chacune de ces propositions, des discussions arithmétiques toujours ennuyeuses, nous ramènerons les démonstrations à l'application du théorème suivant :

Soient $x_0, y_0, z_0, t_0, x_1, y_1, z_1, t_1$ huit inconnues, le système d'équations (¹)

$$(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} (xy)_{01} = A, & (xz)_{01} = B, & (xt)_{01} = C, \\ (zt)_{01} = \alpha, & (ty)_{01} = \beta, & (yz)_{01} = \gamma, \end{cases}$$

est résoluble en nombres entiers si A, B, C, α, β et γ *sont six entiers vérifiant la relation*

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

(¹) Rappelons que $mn_{ij} = m_i n_j - m_j n_i$.

La nécessité de cette relation résulte de l'identité

$$(xy)_{01}(zt)_{01} + (xz)_{01}(ty)_{01} + (xt)_{01}(yz)_{01} \equiv 0,$$

qui a lieu quelles que soient les valeurs de x_0, y_0, ..., t_1.

Nous sommes obligés de distinguer plusieurs cas.

Premier cas. — A, B et C ne sont pas tous nuls. Ces trois nombres entiers ont alors un p. g. c. d. bien déterminé δ. Posons

$$x_0 = \delta, \qquad x_1 = 0, \qquad y_1 = \frac{A}{\delta}, \qquad z_1 = \frac{B}{\delta}, \qquad t_1 = \frac{C}{\delta},$$

les équations de rang impair du système (E) sont satisfaites. Il nous reste, pour déterminer y_0, z_0 et t_0, à résoudre en nombres entiers les trois équations de rang pair de (E) qui s'écrivent

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{C}{\delta} z_0 - \frac{B}{\delta} t_0 &= \alpha, \\ -\frac{C}{\delta} y_0 + \frac{A}{\delta} t_0 &= \beta, \\ \frac{B}{\delta} y_0 - \frac{A}{\delta} z_0 &= \gamma. \end{aligned} \right.$$

Ces équations (8), linéaires en y_0, z_0, t_0, sont compatibles; la troisième est une conséquence des deux autres si l'on tient compte de la relation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

Il nous faut prouver que les deux premières sont résolubles en nombres entiers par rapport aux inconnues y_0, z_0, t_0. On sait qu'il suffit pour cela que les deux matrices

$$\left\| \begin{matrix} 0 & \frac{C}{\delta} & -\frac{B}{\delta} \\ -\frac{C}{\delta} & 0 & \frac{A}{\delta} \end{matrix} \right\| \qquad \left\| \begin{matrix} 0 & \frac{C}{\delta} & -\frac{B}{\delta} & \alpha \\ -\frac{C}{\delta} & 0 & \frac{A}{\delta} & \beta \end{matrix} \right\|$$

aient même p. g. d., c'est-à-dire que les valeurs des déterminants à deux lignes et deux colonnes qu'on peut tirer de chacune d'elles aient pour ces deux matrices même p. g. c. d. Le p. g. d. de la première matrice est le p. g. c. d. de

$$\frac{AC}{\delta^2}, \quad \frac{BC}{\delta^2}, \quad \frac{C^2}{\delta^2},$$

il est égal à $\frac{C}{\delta}$ puisque $\frac{A}{\delta}$, $\frac{B}{\delta}$ et $\frac{C}{\delta}$ sont premiers entre eux dans l'ensemble. Le p. g. d. de la seconde matrice est le p. g. c. d. des nombres

$$\frac{AC}{\delta^2}, \quad \frac{BC}{\delta^2}, \quad \frac{C^2}{\delta^2}, \quad \frac{\alpha C}{\delta}, \quad \frac{\beta C}{\delta}, \quad \frac{\alpha A + \beta B}{\delta}.$$

Or, $\frac{\alpha A + \beta B}{\delta}$ étant égal à $-\frac{\gamma C}{\delta}$, ce p. g. c. d. est encore $\frac{C}{\delta}$ et le système (8) est résoluble en nombres entiers.

En particulier si α, β et γ sont nuls, il suffit de poser

$$y_0 = \frac{A}{\delta}, \qquad z_0 = \frac{B}{\delta}, \qquad t_0 = \frac{C}{\delta}.$$

Deuxième cas. — A, B et C sont nuls ; α, β et γ ne sont pas tous nuls. Supposons α différent de zéro ; α et β ont alors un p. g. c. d. bien déterminé δ. Posons

$$x_0 = x_1 = t_0 = 0, \qquad t_1 = \delta, \qquad y_0 = -\frac{\beta}{\delta}, \qquad z_0 = \frac{\alpha}{\delta}.$$

Pour satisfaire aux équations (E), il suffit de choisir y_1 et z_1 entiers, de manière à vérifier l'équation

$$\frac{\alpha}{\delta} y_1 + \frac{\beta}{\delta} z_1 = \gamma,$$

cela est possible et même d'une infinité de manières, puisque $\frac{\alpha}{\delta}$ et $\frac{\beta}{\delta}$ sont premiers entre eux.

Troisième cas. — A, B, C, α, β et γ sont nuls. Il y a évidemment des solutions entières de (E); ce sont les suivantes :

$$x_0 = m, \qquad y_0 = n, \qquad z_0 = p, \qquad t_0 = q,$$
$$x_1 = km, \qquad y_1 = kn, \qquad z_1 = kp, \qquad t_1 = kq,$$

m, n, p, q et k étant cinq entiers quelconques.

12. Établissons encore la proposition suivante qui sera dans la suite d'un usage constant :

Soient a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ *les seize coefficients d'une substitution* (S) *quelconque de degré* Δ *et* n *un nombre arbitaire, les relations*

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} (ab)_{03} + n(ab)_{12} &= a_{01},\\ (cd)_{03} + n(cd)_{12} &= a_{23},\\ (ac)_{03} + n(ac)_{12} &= a_{02},\\ (db)_{03} + n(db)_{12} &= a_{31},\\ (ad)_{03} + n(ad)_{12} &= a_{03},\\ (bc)_{03} + n(bc)_{12} &= a_{12} \end{aligned}\right.$$

entraînent

$$a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12} = n\Delta.$$

Une forme connue de développement d'un déterminant du quatrième degré donne

$$\begin{aligned} \Delta = {} & [(ab)_{03} + (ab)_{12}][(cd)_{03} + (cd)_{12}]\\ & + [(ac)_{03} + (ac)_{12}][(db)_{03} + (db)_{12}]\\ & + [(ad)_{03} + (ad)_{12}][(bc)_{03} + (bc)_{12}]\\ = {} & (ab)_{03}(cd)_{12} + (ab)_{12}(cd)_{03} + (ac)_{03}(db)_{12} + (ac)_{12}(db)_{03}\\ & + (ad)_{03}(bc)_{12} + (ad)_{12}(bc)_{03} \end{aligned}$$

en tenant compte de l'identité

$$(ab)_{ij}(cd)_{ij} + (ac)_{ij}(db)_{ij} + (ad)_{ij}(bc)_{ij} = 0.$$

Des relations (9) on tire aisément

$$\begin{aligned} a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12} = n[(ab)_{03}(cd)_{12} + \ldots\\ + (ad)_{12}(bc)_{03}] = n\Delta. \end{aligned}$$

13. La méthode que nous suivrons pour traiter les questions relatives à l'équivalence des complexes linéaires arithmétiques consiste essentiellement à comparer ces complexes aux complexes (K_n) d'équation $p_{03}+np_{12}=0$, n recevant toutes les valeurs entières. La comparaison directe de deux complexes généraux assujettis seulement à certaines conditions, par exemple : l'égalité des invariants, conduirait à des équations très compliquées. La méthode précédente conduit à des systèmes d'équations simples du type (E) et, par ce moyen, les résultats principaux apparaissent assez simplement.

Nous établirons d'abord la proposition suivante :

Il existe des substitutions arithmétiques (S) *de degré* Δ *changeant le complexe arithmétique* (c) *d'équation réduite*

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0,$$

et d'invariant Δ *positif ou négatif dans le complexe* (K_1)

$$P_{03} + P_{12} = 0,$$

et il n'en existe pas de degré moindre.

Si nous nous reportons aux relations (R'_1), nous trouvons que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution (S) change (c) en (K_1) est que ses coefficients a_i, b_i, c_i, d_i vérifient les équations

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} (ab)_{03} + (ab)_{12} &= \lambda a_{01}, \\ (cd)_{03} + (cd)_{12} &= \lambda a_{23}, \\ (ac)_{03} + (ac)_{12} &= \lambda a_{02}, \\ (db)_{03} + (db)_{12} &= \lambda a_{31}, \\ (ad)_{03} + (ad)_{12} &= \lambda a_{03}, \\ (bc)_{03} + (bc)_{12} &= \lambda a_{12}. \end{aligned}\right.$$

Le paramètre λ ne peut qu'être entier. En effet, les premiers membres des équations (10) sont entiers, les a_{ik} sont entiers, donc λ est rationnel et, de plus, toutes les quantités λa_{ik} sont entières. Si $\lambda = \frac{p}{q}$, p et q étant premiers entre eux, q doit diviser tous les a_{ik} ; or, ces nombres a_{ik} sont premiers entre eux dans l'ensemble, par conséquent q est égal à l'unité et λ est entier.

Pour résoudre en nombres entiers les équations (10), il suffit de résoudre

$$(11)\quad \begin{cases} (ab)_{03} = \lambda a_{01}, & (cd)_{03} = 0, & (ac)_{03} = \lambda a_{02}, \\ (db)_{03} = 0, & (ad)_{03} = \lambda a_{03}, & (bc)_{03} = 0, \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} (ab)_{12} = 0, & (cd)_{12} = \lambda a_{23}, & (ac)_{12} = 0, \\ (db)_{12} = \lambda a_{31}, & (ad)_{12} = 0, & (bc)_{12} = \lambda a_{12}. \end{cases}$$

Ces deux systèmes (11) et (12) sont des systèmes d'équations du type (E) résolubles en nombres entiers (§ 11).

On en conclut l'existence de substitutions arithmétiques (S) pour toute valeur entière non nulle de λ ; le degré de (S) est (§ 12) égal à $\lambda^2 \Delta$. Les substitutions (S) de plus bas degré sont de degré Δ. Il en existe de ce degré ainsi que de tous les degrés multiples de l'invariant Δ du complexe (c) par un carré parfait.

Cas particulier. — Un cas intéressant est celui des complexes (c) d'invariant égal à ± 1.

Le complexe (K_{-1}) d'équation

$$P_{03} - P_{12} = 0$$

est improprement équivalent au complexe (K_1). D'une façon générale :

Tout complexe arithmétique d'invariant $\varepsilon = \pm 1$ est proprement équivalent au complexe (K_ε) et improprement équivalent au complexe ($K_{-\varepsilon}$).

Sous une autre forme :

Tous les complexes linéaires arithmétiques d'invariant $\varepsilon = \pm 1$ sont proprement équivalents entre eux et improprement équivalents à tous les complexes d'invariant $-\varepsilon$.

Nous étendrons cette proposition aux complexes d'invariant quelconque.

14. *Les complexes arithmétiques dont l'invariant est un même nombre premier n sont proprement équivalents entre eux.*

Montrons que :

Tout complexe arithmétique (c) *d'équation réduite* $\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0$ *et d'invariant n premier est équivalent au complexe* (K_n).

Comme nous n'avons en vue que l'équivalence arithmétique, c'est-à-dire l'équivalence dans des substitutions (S) de degré 1, nous pouvons appliquer (§ 8) les formules (R_1') et (R_2') telles que nous les avons écrites. Les relations (R_2') nous montrent immédiatement que la proposition précédente revient à affirmer que le système suivant d'équations (13) est toujours résoluble en nombres entiers par rapport aux inconnues a_i, b_i, c_i et d_i :

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} (ab)_{03} + n(ab)_{12} &= a_{01}, \\ (cd)_{03} + n(cd)_{12} &= a_{23}, \\ (ac)_{03} + n(ac)_{12} &= a_{02}, \\ (db)_{03} + n(db)_{12} &= a_{31}, \\ (ad)_{03} + n(ad)_{12} &= a_{03}, \\ (bc)_{03} + n(bc)_{12} &= a_{12}; \end{aligned}\right.$$

n n'étant pas nul, les coefficients a_{01}, a_{02} et a_{03} ne

sont pas tous nuls, puisque l'invariant

$$a_{01}a_{23} + a_{32}a_{31} + a_{03}a_{12}$$

est égal à n et ils ont un p. g. c. d. δ qui ne peut être égal qu'à 1 ou à n, puisque c'est un diviseur du nombre premier n. Nous sommes ainsi conduits à distinguer deux cas :

1° a_{01}, a_{02} et a_{03} *sont premiers entre eux dans l'ensemble.*

Nous pouvons, dans ce cas, déterminer d'une infinité de manières trois entiers λ, μ, ν vérifiant la relation

$$\lambda a_{01} + \mu a_{02} + \nu a_{03} = 1. \tag{14}$$

Nous pouvons poser

$$a_{23} = \alpha + n\lambda, \qquad a_{31} = \beta + n\mu, \qquad a_{12} = \gamma + n\nu,$$

α, β et γ étant des entiers.

L'équation

$$a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12} = n$$

nous montre, en tenant compte de (14), que

$$\alpha a_{01} + \beta a_{02} + \gamma a_{03} = 0.$$

Les deux systèmes d'équations

$$\begin{aligned}
(ab)_{03} &= a_{01}, & (ab)_{12} &= 0,\\
(cd)_{03} &= \alpha, & (cd)_{12} &= \lambda,\\
(ac)_{03} &= a_{02}, & (ac)_{12} &= 0,\\
(db)_{03} &= \beta, & (db)_{12} &= \mu,\\
(ad)_{03} &= a_{03}, & (ad)_{12} &= 0,\\
(bc)_{03} &= \gamma, & (bc)_{12} &= \nu
\end{aligned}$$

sont deux systèmes du type (E) résolubles en nombres entiers par rapport aux inconnues a_i, b_i, c_i et d_i (§ 11). On en conclut aisément l'existence d'une substitu-

tion (S) changeant (c) en (K_n) et dont le degré (§ 12) est égal à 1.

2° *Le p. g. c. d. de a_{01}, a_{02} et a_{03} est égal à n.*

Les deux systèmes d'équations

$$
\begin{array}{ll}
(ab)_{03} = 0, & (ab)_{12} = \dfrac{a_{01}}{n}, \\
(cd)_{03} = a_{23}, & (cd)_{12} = 0, \\
(ac)_{03} = 0, & (ac)_{12} = \dfrac{a_{02}}{n}, \\
(db)_{03} = a_{31}, & (db)_{12} = 0, \\
(ad)_{03} = 0, & (ad)_{12} = \dfrac{a_{03}}{n}, \\
(bc)_{03} = a_{12}, & (bc)_{12} = 0,
\end{array}
$$

sont du type (E), résolubles en nombres entiers (§ 11), et leurs solutions donnent des substitutions (S) de degré 1 (§ 12) changeant (c) en (K_n).

15. La même démonstration légèrement modifiée montre que :

Tout complexe arithmétique d'invariant premier n est improprement équivalent au complexe (K_{-n}) *et à tout complexe arithmétique d'invariant* $-n$.

16. On démontre de la même manière que :

Il existe des substitutions arithmétiques (S) *de degré* Δ *changeant le complexe arithmétique* (c) *d'invariant* Δn, *n étant un nombre premier, dans le complexe* (K_n). *Il en existe de tous les degrés* $K^2\Delta$, K *étant un entier arbitraire non nul, et il n'en existe pas de degrés autres.*

Les substitutions de plus bas degré sont de degré Δ.

17. Le cas de n quelconque et non pas nécessaire-

ment premier est plus difficile à traiter. Il est cependant aisé de prouver que, parmi les solutions des équations que doivent vérifier les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i des substitutions (S) dont on a à prouver l'existence, il y en a qui sont fournies par deux systèmes d'équations du type (E) (§ 11). Considérons, par exemple, la proposition suivante :

Il existe des substitutions arithmétiques (S) *de degré* Δ *changeant le complexe arithmétique* (c) *d'équation réduite* $\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0$ *et d'invariant* Δn *dans le complexe* (K_n).

Elle comprend, comme cas particulier, l'équivalence des complexes de même invariant.

L'application des formules (R'_2) et les considérations (§ 12) relatives au degré de (S) montrent qu'on est ramené à prouver la résolubilité en nombres entiers des équations

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &(ab)_{03} + n(ab)_{12} = a_{01}, \\ &(cd)_{03} + n(cd)_{12} = a_{23}, \\ &(ac)_{03} + n(ac)_{12} = a_{02}, \\ &(db)_{03} + n(db)_{12} = a_{31}, \\ &(ad)_{03} + n(ad)_{12} = a_{03}, \\ &(bc)_{03} + n(bc)_{12} = a_{12}. \end{aligned}\right.$$

Supposons qu'il existe une substitution arithmétique (S) changeant (c) en (K_n) ; nous pouvons poser

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &(ab)_{03} = a'_{01}, \quad (cd)_{03} = a'_{23}, \quad (ac)_{03} = a'_{02}, \\ &(db)_{03} = a'_{31}, \quad (ad)_{03} = a'_{03}, \quad (bc)_{03} = a'_{12}. \end{aligned}\right.$$

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &(ab)_{12} = a''_{01}, \quad (cd)_{12} = a''_{23}, \quad (ac)_{12} = a''_{02}, \\ &(db)_{12} = a''_{31}, \quad (ad)_{12} = a''_{03}, \quad (bc)_{12} = a''_{12}. \end{aligned}\right.$$

Les nombres a'_{ik} et a''_{ik} sont entiers et vérifient les

équations

$$(18)\quad \begin{cases} a'_{01}a'_{23}+a'_{02}a'_{31}+a'_{03}a'_{12}=0, \\ a''_{01}a''_{23}+a''_{02}a''_{31}+a''_{03}a''_{12}=0 \end{cases}$$

et

$$(19)\quad \begin{aligned} & a'_{01}a''_{23}+a''_{01}a'_{23}+a'_{02}a''_{31} \\ & \qquad +a''_{02}a'_{31}+a'_{03}a''_{12}+a''_{03}a'_{12}=\Delta. \end{aligned}$$

Il existe, par conséquent, douze entiers a'_{ik} et a''_{ik} tels que l'on ait

$$(20)\qquad a_{ik}=a'_{ik}+na''_{ik},$$

les équations (18) et (19) étant vérifiées; la relation (19) n'est d'ailleurs qu'une conséquence directe de l'hypothèse faite sur l'invariant de (c) d'être égal à Δn.

Inversement, si l'on peut déterminer douze entiers a'_{ik} et a''_{ik} vérifiant les équations (18) et (20), les systèmes d'équations (15) et (17) sont du type (E), résolubles en nombres entiers (§ 11), le système (13) a donc des solutions entières et l'équivalence de (c) et de (K_n) se trouve établie.

Par conséquent :

La condition nécessaire et suffisante pour que le complexe arithmétique (c) d'équation réduite $\Sigma a_{ik}p_{ik}=0$ et d'invariant $n\Delta$ soit équivalent dans une substitution de degré Δ au complexe (K_n), est qu'on puisse trouver douze entiers a'_{ik} et a''_{ik} vérifiant les équations

$$a_{ik}=a'_{ik}+na''_{ik},$$
$$a'_{01}a'_{23}+a'_{02}a'_{31}+a'_{03}a'_{12}=0,$$
$$a''_{01}a''_{23}+a''_{02}a''_{31}+a''_{03}a''_{12}=0.$$

Le théorème de géométrie que nous voulons établir est donc entièrement équivalent à cette proposition d'arithmétique :

Soient a_{ik} : a_{01}, a_{23}, a_{02}, a_{31}, a_{03}, a_{12}, six nombres

entiers donnant une représentation propre de $n\Delta$ par la forme

$$\Phi(a_{ik}) = a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12},$$

n et Δ étant deux entiers quelconques. On peut poser

$$a_{ik} = a'_{ik} + na''_{ik},$$

de manière que les six nombres a'_{ik} d'une part, les six nombres a''_{ik} d'autre part, fournissent une représentation propre de zéro par la forme Φ.

Les théorèmes précédents (§ 13, 14, 15 et 16) prouvent que cette proposition est exacte pour n égal à l'unité ou même pour n premier. Au fond, ils ont été démontrés par la voie que nous suivons maintenant en effectuant cette décomposition de toute représentation propre de $n\Delta$ par Φ en une somme de deux représentations de zéro par la même forme.

18. Pour éviter toute difficulté dans ce cas où n est quelconque, nous utiliserons le résultat suivant : tout complexe linéaire arithmétique est équivalent à un complexe arithmétique de même invariant dont les coefficients a_{01} et a_{23} sont nuls. C'est un cas particulier d'une proposition plus générale que nous avons établie ailleurs, à propos de recherches sur les fonctions abéliennes [1].

Nous n'avons ainsi qu'à démontrer le résultat annoncé que dans le cas où a_{01} et a_{23} sont nuls, cas où il est à peu près évident, ce qui nous évitera de nouveaux raisonnements arithmétiques.

---

(1) *Les fonctions abéliennes et la théorie des nombres*, 1re Partie, Chap. III, § 3 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1912).

En effet, si a_{01} et a_{23} sont nuls, a_{02}, a_{31}, a_{03} et a_{12} étant premiers entre eux, on peut d'une infinité de manières déterminer quatre entiers a''_{02}, a''_{31}, a''_{12} et a''_{03} vérifiant l'équation

$$a_{02}a''_{31} + a_{31}a''_{02} + a_{03}a''_{12} + a_{12}a''_{03} = \Delta,$$

ces entiers étant choisis, il est bien facile d'en trouver deux autres, a''_{01} et a''_{23}, tels que

$$a''_{01}a''_{23} = -(a''_{02}a''_{31} + a''_{03}a''_{12}).$$

Les a''_{ik} étant déterminés, les a'_{ik} le sont par les relations

$$a'_{ik} = a_{ik} - na''_{ik},$$

et l'on vérifie aisément que les entiers a'_{ik} et a''_{ik} satisfont à toutes les conditions imposées.

19. On en conclut du même coup l'exactitude des deux propositions (§ 17) géométrique et arithmétique. C'est un fait général et des raisonnements simples du genre des précédents permettent d'énoncer de nombreuses propositions d'arithmétique, conséquences des précédentes, et qui conduisent aux propriétés de la forme Φ. Nous en donnerons seulement deux exemples de nature différente :

1° De la proposition relative à l'équivalence des complexes de même invariant, on déduit que :

Étant données deux représentations propres a_{ik} et A_{ik} d'un même nombre par la forme Φ, on peut toujours passer de l'une à l'autre par une substitution du premier degré à six variables du type (R'_1) *ou* (R'_2).

Ces substitutions (R') ne dépendent que de seize entiers. On peut énoncer ce théorème :

Étant donnée une représentation propre a_{ik} du nombre entier n par la forme Φ, on en déduit toutes les autres représentations propres de n par Φ et celles-là seulement par les formules (R'_1) *où a_i, b_i, c_i, d_i sont seize entiers assujettis seulement à rendre égal à l'unité le déterminant de* (R'_1).

2° Donnons un exemple où interviennent les systèmes d'équation du type (E).

Il est bien évident qu'on peut toujours trouver un complexe arithmétique (C) équivalent à un complexe (c), de coefficients réduits a_{ik}, tel que les coefficients a_{03} et a_{12} de (C) par exemple aient des valeurs entières arbitraires p et q. En raisonnant comme nous l'avons fait (§ 17) on en conclut que :

Étant donnés deux nombres entiers quelconques p et q, on peut toujours trouver deux représentations $(x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1)$ *et* $(x'_0, x'_1, y'_0, y'_1, z'_0, z'_1)$ *de ces nombres par la forme linéaire à six variables*

$$a_{01}x_0 + a_{23}x_1 + a_{02}y_0 + a_{31}y_1 + a_{03}z_0 + a_{12}z_1,$$

dont les six coefficients a_{ik} sont supposés premiers entre eux dans l'ensemble, telles que $(x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1)$ *et* $(x'_0, x'_1, y'_0, y'_1, z'_0, z'_1)$ *fournissent une représentation propre de zéro par la forme* $\Phi \equiv X_0X_1 + Y_0Y_1 + Z_0Z_1$, $[(x_0 + x'_0), (x_1 + x'_1), (y_0 + y'_0), (y_1 + y'_1), (z_0 + z'_0), (z_1 + z'_1)]$ *donnant une représentation de l'unité par cette même forme Φ; c'est-à-dire telles qu'on ait*

$$x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 = 0,$$
$$x'_0x'_1 + y'_0y'_1 + z'_0z'_1 = 0,$$
$$(x_0+x'_0)(x_1+x'_1) + (y_0+y'_0)(y_1+y'_1) + (z_0+z'_0)(z_1+z'_1) = 1.$$

20. Pour achever l'étude de l'équivalence des complexes arithmétiques, il nous reste à déterminer les substitutions permettant de passer d'un complexe arithmétique quelconque (c) d'invariant n à un autre complexe arithmétique quelconque (C) d'invariant N.

Nous savons trouver une substitution arithmétique Σ de degré 1 changeant (c) en (K_n) de même invariant et une substitution également du premier degré Σ' changeant (K_N) en (C). Désignons par S toute substitution (S) arithmétique de degré Δ changeant (K_n) en (K_N); les substitutions $\Sigma S \Sigma'$ sont de degré Δ, changent (c) en (C) et sont les seules substitutions arithmétiques jouissant de ces deux propriétés. Nous sommes ainsi ramenés à la recherche des substitutions changeant (K_n) en (K_N).

L'application des formules générales (R'_1) et R'_2) donne immédiatement les relations nécessaires et suffisantes qui existent entre les coefficients a_i, b_i, c_i et d_i d'une substitution (S) changeant (K_n) en (K_N). Ces relations sont celles de l'un ou l'autre des deux systèmes suivants d'équations qui sont entièrement équivalents :

$$(R'_1)\left\{\begin{aligned} (ab)_{03} + N(ab)_{12} &= 0, \\ (cd)_{03} + N(cd)_{12} &= 0, \\ (ac)_{03} + N(ac)_{12} &= 0, \\ (db)_{03} + N(db)_{12} &= 0, \\ (bc)_{03} + N(bc)_{12} = n[(ad)_{03} + N(ad)_{12}] &= \mathfrak{N}; \end{aligned}\right.$$

$$(R'_2)\left\{\begin{aligned} n(ad)_{01} + (bc)_{01} &= 0, \\ n(ad)_{23} + (bc)_{23} &= 0, \\ n(ad)_{02} + (bc)_{02} &= 0, \\ n(ad)_{31} + (bc)_{31} &= 0, \\ n(ad)_{03} + (bc)_{03} = N[n(ad)_{12} + (bc)_{12}] &= \mathfrak{N}. \end{aligned}\right.$$

$\mathfrak{N}$ est nécessairement multiple de n et de N. D'ailleurs $\mathfrak{N}$ étant ainsi choisi multiple quelconque de n et

de N, il existe des substitutions (S) dont les coefficients vérifient les relations ci-dessus écrites. Leur degré (§ 12) est égal à $\frac{\mathfrak{M}^2}{Nn}$.

Soit δ le p. g. c. d. de N et n et soit

$$n = n'\delta, \qquad N = N'\delta.$$

$\mathfrak{M}$ multiple de n et de N est de la forme $K\delta N'n'$, K étant un entier quelconque. Le degré de (S) est égal à $\frac{K^2\delta^2 N'^2 n'^2}{\delta^2 N' n'} = K^2 N' n'$. A chaque valeur de K correspondent des substitutions (S) changeant (K_n) en (K_N) et les substitutions de plus bas degré sont de degré $n'N'$. Si n et N sont premiers entre eux, elles sont de degré nN. n et N étant deux entiers quelconques, ces résultats s'étendent aux substitutions changeant (K_N) en (K_n). Finalement :

Deux complexes arithmétiques d'invariants n et N *sont équivalents dans des substitutions de degré* $n'N'$, n' *et* N' *étant les quotients de n et de* N *par leur p. g. c. d. D'une façon générale,* K *désignant un entier arbitraire, toutes les substitutions changeant l'un quelconque des deux complexes en l'autre sont de degré* $K^2N'n'$ *et il en existe de tous ces degrés correspondant aux diverses valeurs entières de* K.

La détermination effective de ces substitutions résulte des considérations précédentes.

Nous réservons pour le moment l'étude des substitutions automorphes d'un complexe linéaire, c'est-à-dire des substitutions le laissant inaltéré.

21. Jusqu'à présent nous n'avons pas considéré les complexes spéciaux et il nous reste à étudier l'équiva-

lence de ces complexes spéciaux, c'est-à-dire des droites arithmétiques.

Toutes les droites arithmétiques sont équivalentes entre elles arithmétiquement et même dans les substitutions de tous les degrés.

Autrement :

Taus les complexes spéciaux sont équivalents entre eux arithmétiquement et dans des substitutions de tous les degrés.

Conformément à la méthode que nous avons suivie, nous montrerons que tout complexe arithmétique spécial d'axe (d) est équivalent au complexe spécial (K_0), c'est-à-dire au complexe dont l'axe est la droite (D_0) dont toutes les coordonnées p_{ik} sont nulles sauf $p_{12} = 1$.

L'application des formules (R_1) et (R_2) donne immédiatement les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une substitution (S) change la droite (d) de coordonnées p_{ik} en (D_0). Ce sont les suivantes :

$$(20)\quad \left\{ \begin{array}{lll} (cd)_{03} = p_{01}, & (ab)_{03} = p_{23}, & (db)_{03} = p_{02}, \\ (ac)_{03} = p_{31}, & (bc)_{03} = p_{03}, & (ad)_{03} = p_{12}. \end{array} \right.$$

Si le degré Δ de (S) est fixé, il faut en outre que si l'on pose

$$\begin{array}{lll} (cd)_{12} = \alpha_{23}, & (ab)_{12} = \alpha_{01}, & (db)_{32} = \alpha_{31}, \\ (ac)_{12} = \alpha_{02}, & (bc)_{12} = \alpha_{12}, & (ad)_{12} = \alpha_{03}, \end{array}$$

on ait d'abord la relation

$$\alpha_{01}\alpha_{23} + \alpha_{02}\alpha_{31} + \alpha_{03}\alpha_{12} = 0$$

et ensuite

$$\Sigma \alpha_{ik} p_{ik} = \Delta.$$

Tout revient à déterminer les α_{ik}, car ensuite la

détermination des coefficients de (S) est ramenée à la résolution en nombres entiers de deux systèmes du type (E) (§ 11). Comme pour les complexes non spéciaux la proposition géométrique se ramène à un théorème d'arithmétique :

Étant donnée une représentation propre p_{ik} *de zéro par la forme* Φ, *on peut trouver une autre représentation de zéro par* Φ *telle que* $\Sigma a_{ik} p_{ik}$ *soit égal à un nombre entier quelconque* Δ.

Ce théorème est évident lorsque p_{01}, p_{02} et p_{03} sont nuls. Or une droite arithmétique contient une infinité de points arithmétiques (points à coordonnées entières); les points arithmétiques sont équivalents entre eux et en particulier équivalents au point (1, 0, 0, 0). Donc, toute droite arithmétique est équivalente à une droite arithmétique passant par ce dernier point, droite dont les coordonnées p_{01}, p_{02} et p_{03} sont nulles.

La démonstration de la proposition précédente est ainsi ramenée au cas où elle est évidente.

Remarque. — Ce théorème permet de compléter les résultats (§ 19) relatifs aux propriétés de la forme Φ en ce qui concerne les représentations de zéro par cette forme, et il est susceptible d'applications arithmétiques analogues à celles que nous avons données.

(*A suivre.*)

BIBLIOGRAPHIE.

E. Lebon. — *Notice sur Henri Poincaré*, gr. in-8°; 48 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1913.

Cette Notice figure en tête de la 2ᵉ édition des *Leçons sur*

les hypothèses cosmogoniques du grand géomètre. Elle se divise en deux Parties :

I. Sur la vie de Henri Poincaré.

II. Sur les travaux scientifiques de Henri Poincaré.

C'est surtout de la première que nous voulons parler ici à nos lecteurs.

M. Lebon ne s'est pas proposé de présenter une simple et sèche biographie, apportant des renseignements utiles et précis sur les étapes de cette existence trop tôt interrompue. Il a voulu la reconstituer, la faire revivre sous sa plume, montrer l'homme en même temps que le savant, faire ressortir les qualités morales associées à la puissance intellectuelle, les vertus privées à côté de la droiture du caractère, les aspirations généreuses et nobles accompagnant le génie scientifique.

Je crois pouvoir affirmer qu'il a bien accompli cette tâche, imposée par lui-même, et que les lecteurs qui n'ont pas eu le privilège de connaître personnellement Henri Poincaré prendront plaisir à étudier ce portrait fidèle qui forcera leur admiration, et pourra servir de modèle aux jeunes.

Entre autres choses, je sais infiniment gré à M. Lebon d'avoir rappelé une pensée qui me frappa beaucoup lorsque je l'entendis exprimer, pour la première fois, je crois bien, et qui m'est, depuis lors, restée dans le souvenir comme l'expression d'une haute vérité. Elle est relative à l'utilité de la Science. Il ne faut pas dire, affirme Henri Poincaré, que la Science est utile parce qu'elle nous apprend à construire des machines; mais que les machines sont utiles, parce qu'en travaillant pour nous, elles nous laisseront un jour plus de temps pour faire de la science.

Dois-je reprocher à M. Lebon d'avoir laissé dans l'ombre un trait caractéristique du caractère de son héros, qui a provoqué souvent des sourires, mais qui, à mon sens, ornait cette figure d'un charme de plus? Je veux parler de ses distractions, qui évoquèrent plus d'une fois le souvenir de la vie d'Ampère. Peut-être, à si peu de distance de la date fatale où la Science a fait une si grande perte, a-t-on pensé qu'il n'y avait place que pour des paroles graves. Mais je suis certain que l'histoire définitive ne laissera pas échapper certaines anecdotes, et que la mémoire du géomètre de génie n'en recevra aucune atteinte.

En somme, ainsi que le dit excellemment l'auteur, « Henri

Poincaré a légué aux siècles à venir, avec l'exemple d'une vie aussi simple que belle et noblement remplie, sa réconfortante pensée, sa foi en la grandeur, en la beauté de l'humanité ».

La seconde Partie de la Notice sera utile à bien des chercheurs. Elle montre, avec les références désirables, que les travaux de Henri Poincaré ont porté sur tout le champ de la Science mathématique, et que ce grand chercheur, ce découvreur de vérité n'a pas fait de classement, n'a pas établi de hiérarchie entre la théorie et l'application.

Analyse pure, Arithmétique, Algèbre, Géométrie, Mécanique analytique, Mécanique céleste, Physique mathématique ont été explorées par lui. Il a touché à tout, et partout il a laissé sa magistrale empreinte.

C.-A. LAISANT.

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Définir les caractéristiques pour une surface intégrale de l'équation*

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Équation différentielle de ces caractéristiques.

Méthode d'intégration à l'aide des caractéristiques.

Appliquer, comme exemple, à l'équation

$$p^2 - qx + z = 0$$

dont on cherchera la surface intégrale qui contient la droite

$$x = 0, \qquad y = z.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver les solutions communes*

aux deux équations

$$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - (3x_2x_4 + x_1 + x_1x_2)\frac{\partial f}{\partial x_3} - x_1x_2\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$

$$x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_4 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \quad x_4[1 + x_2 - 3x_3] \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_2x_3\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$

dans lesquelles f est une fonction inconnue des quatre variables indépendantes x_1, x_2, x_3, x_4.

(Novembre 1911.)

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Pour que l'équation différentielle algébrique*

$$(1) \qquad f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

admette une intégrale uniforme, il faut que la courbe

$$f(x, y) = 0$$

soit de genre 0 *ou de genre* 1. *Si cette condition est remplie, l'équation* (1) *peut toujours être intégrée par des quadratures.*

Démontrer ce théorème. Comme application, intégrer l'équation

$$(2) \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^4 + (2u^2 + a^2)\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + u^2(u^2 - a^2) = 0,$$

a étant une constante. (Juillet 1911.)

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On donne l'équation*

$$(1) \qquad u^3 - zu + 2\varphi(z) = 0,$$

$\varphi(z)$ désignant un polynome entier tel que, pour aucune

des valeurs de z qui rendent son carré égal à l'unité, $\varphi'(z)$ ne soit nul.

1° *Quels sont, à distance finie, les points singuliers de la fonction algébrique u? Trouver la forme des développements qui représentent ses branches envisagées dans le domaine de chacun de ces points.*

2° *Former l'équation différentielle linéaire homogène* (E) *du second ordre à laquelle ces branches satisfont.*

3° *Quels sont, à distance finie, les points singuliers de l'équation* (E). *Écrire l'équation déterminante relative à chacun d'eux. Montrer que, parmi ces points, ceux pour lesquels $\varphi'(z)$ est nul sont des points à apparence singulière pour l'équation* (E).

4° *Abstraction faite du dénominateur, le coefficient de $\dfrac{du}{dz}$ dans l'équation* (E) *est égal à*

$$\varphi\varphi'^2 - (\varphi^2 - 1)\varphi''.$$

Choisir la fonction φ, maintenant quelconque, de manière que ce coefficient soit identiquement nul, et, φ étant ainsi choisi, intégrer l'équation (E), *puis en déduire les trois racines de l'équation* (1).

Appliquer au cas, où l'on prend

$$\varphi = \cos z.$$

Épreuve pratique. — *On considère la fonction rationnelle de z et u*

$$v = \frac{u^3 + z^2u^2 + 16u + 16z^2}{z^3 - 2z^2 - 5z + 10},$$

u étant une fonction algébrique de z définie par l'équation $u^2 = z^4 - 16$, *et la surface de Riemann* T *correspondante.*

Trouver les pôles et les zéros de v sur T *ainsi que leurs ordres; trouver les résidus. Quel est le nombre des racines de l'équation* $v = C$, C *étant une constante?*

(Juin 1910.)

ERRATA.

Page 51, dans la figure 2, NK est perpendiculaire à CN, et $\omega K = 3 \omega H$.

Page 55, ligne 9 en remontant, remplacer $=$ par $\equiv$.

Page 57, modifier la figure 3 comme il suit : changer le sens de la concavité de l'arc MR; la lettre R est le point d'intersection de cet arc avec le cercle Σ.

Page 57, ligne 4, *au lieu de* $\frac{\pi}{2}$, *lire* $\frac{\pi}{3}$.

Page 64, ligne 7 en remontant, remplacer $-$ par $+$.

Page 64, ligne 5 en remontant, remplacer G par C.

[O7a]

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DE L'ESPACE RÉGLÉ;

Par M. Gaston COTTY.

(*Fin.*)

IV

22. On sait l'importance que présente la géométrie réglée par rapport à un complexe linéaire, c'est-à-dire celle où l'on distingue, parmi les divers ensembles réglés de l'espace, ceux qui jouissent de propriétés particulières par rapport à un complexe.

Les transformations de contact du genre de la transformation de Sophus Lie font correspondre les droites d'un complexe linéaire (K) aux points d'un espace ordinaire (E) à trois dimensions.

A un système de deux droites conjuguées par rapport à (K) correspond une pseudo-sphère de (E) en appelant *pseudo-sphères* les quadriques de (E) passant par une même conique. Aux substitutions (S) n'altérant pas le complexe (K) correspondent des substitutions de l'espace (E) conservant cette conique et, à un groupe de substitutions (S) n'altérant pas deux droites conjuguées par rapport à (K), correspond un groupe de substitutions semblables d'une forme quadratique, premier membre d'une équation homogène d'une pseudo-sphère de (E). On voit ainsi l'importance que présentent ces substitutions (S) dans un grand nombre de recherches relatives à la théorie des groupes et de certaines fonctions.

Nous avons donné ailleurs de ce principe une appli-

cation à une classe remarquable de fonctions hyperabéliennes.

23. Les considérations qui ont fait l'objet des précédents Chapitres permettent d'étudier les substitutions (S) arithmétiques laissant inaltéré un complexe arithmétique (K) d'invariant quelconque n, autrement dit les substitutions automorphes du complexe (K).

Soit (K_n) le complexe $p_{03}+np_{12}=0$, on sait qu'il existe une substitution Σ de degré 1 changeant (K) en (K_n) ; la substitution inverse Σ^{-1} est également arithmétique et de degré 1 et elle change (K_n) en (K). Soit S l'une quelconque des substitutions automorphes de (K_n), les substitutions $\Sigma S \Sigma^{-1}$, c'est-à-dire les *transformées* des S par Σ laissent inaltéré le complexe (K) et sont les seules substitutions jouissant de cette propriété. Il nous suffira donc d'étudier les substitutions automorphes des complexes (K_n).

Les formules (R'_1) et (R'_2) donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une substitution (S) n'altère pas (K_n); elles s'écrivent :

$$(R'_1)\quad\left\{\begin{aligned}(ab)_{03}+n(ab)_{12}&=0,\\(cd)_{03}+n(cd)_{12}&=0,\\(ac)_{03}+n(ac)_{12}&=0,\\(db)_{03}+n(db)_{12}&=0,\\(bc_{03})+n(bc)_{12}=n[(ad)_{03}+n(ad)_{12}]&=n\lambda,\end{aligned}\right.$$

$$(R'_2)\quad\left\{\begin{aligned}n(ad)_{01}+(bc)_{01}&=0,\\n(ad)_{23}+(bc)_{23}&=0,\\n(ad)_{02}+(bc)_{02}&=0,\\n(ad)_{31}+(bc)_{31}&=0,\\n(ad)_{03}+(bc)_{03}=n[n(ad)_{12}+(bc)_{12}]&=n\lambda;\end{aligned}\right.$$

ces deux systèmes d'équations étant entièrement équivalents.

A chaque valeur entière du paramètre λ, il correspond des substitutions automorphes de (K_n) dont le degré (§ 12) est égal à λ^2. Ce degré est donc toujours carré parfait, ce qu'on pourrait établir autrement (§ 20) par application de résultats généraux. On en conclut que :

Si une substitution arithmétique (S) *laisse inaltéré un complexe arithmétique d'invariant non nul, son degré est carré parfait.*

La condition relative à l'invariant de ne pas être nul est essentielle.

Nous nous en tiendrons à ce résultat et nous n'étudierons pas ces substitutions automorphes des complexes (K_n); elles jouent un rôle capital dans la transformation des fonctions abéliennes et sont surtout intéressantes à ce point de vue.

24. Distinguons, parmi les quadriques, celles qui appartiennent à un complexe linéaire arithmétique quelconque ; elles sont équivalentes aux quadriques appartenant aux complexes (K_n), n recevant toutes les valeurs entières, y compris la valeur nulle qui correspond au complexe spécial (K_0). On peut se proposer de comparer les quadriques de (K_n) dans les substitutions n'altérant pas ce complexe. La question se transporte aisément dans la théorie des formes quadratiques, en considérant les formes des premiers membres des équations de ces quadriques. Entre les coefficients de ces formes à quatre variables existent des relations que conservent les substitutions (S) n'altérant pas (K_n). On voit ainsi comment la géométrie réglée vient présenter cette notion très importante de formes quadratiques particulières que l'on compare dans des substi-

tutions spéciales qui ne sont pas les substitutions linéaires les plus générales. On peut se poser, à ce point de vue, le problème de l'équivalence; cette étude est particulièrement intéressante à cause de l'importance qu'elle prend dans la théorie des fonctions et des formes abéliennes; nous l'avons développée ailleurs. Il nous suffit ici d'avoir donné la notion de cette nouvelle forme d'équivalence.

On est naturellement conduit à se demander quel est, en quelque sorte, le degré de généralité des quadriques à coefficients entiers, assujetties seulement à appartenir à un complexe linéaire arithmétique quelconque et non fixé, c'est-à-dire à cette condition que, parmi l'infinité de complexes linéaires auxquels appartient chacune de ces quadriques, il y en ait un au moins dont les coefficients soient rationnels. Nous nous en rendrons compte en établissant une propriété commune à toutes les formes quadratiques à quatre variables f premiers membres des équations $f = 0$ de ces quadriques.

25. Si une quadrique (Q) appartient à un complexe *arithmétique* spécial ou, ce qui revient au même, possède parmi ses génératrices rectilignes une droite *arithmétique*, cette quadrique est équivalente à une quadrique contenant la droite (D_0) dont toutes les coordonnées (§ 21) p_{ik} sont nulles sauf p_{12} qui est égale à 1. Il est aisé de vérifier qu'une quadrique quelconque admettant cette droite comme génératrice rectiligne a son discriminant carré parfait. On en conclut que :

Si une quadrique admet comme génératrice rectiligne une droite arithmétique quelconque ou, ce qui revient au même, appartient à un complexe arith-

métique spécial quelconque, son discriminant est carré parfait.

Considérons maintenant une quadrique (Q) dont l'équation à coefficients entiers s'écrit :

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0;$$

cette quadrique contient deux demi-quadriques, chacune d'elles étant formée par les droites d'un système à trois termes, c'est-à-dire par les droites appartenant à une triple infinité de complexes linéaires (cela ne suppose en rien la rationalité des coefficients de f) et tout complexe de l'un des deux systèmes à trois termes est en involution avec tous les complexes de l'autre système. Chacun de ces systèmes comprend, si l'on veut, autant de complexes qu'il y a de points dans un plan. Si, parmi ces complexes en nombre ∞^3, il s'en trouve un à coefficients rationnels et spécial ou non spécial (les complexes spéciaux ont comme axes les génératrices rectilignes), le discriminant de la forme quadratique f est carré parfait. C'est ce que nous allons prouver dans les paragraphes suivants.

26. Démontrons cette proposition géométrique qui nous sera très utile :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une quadrique (Q) *appartienne à un complexe linéaire* (K) *est que toute droite conjuguée d'une génératrice rectiligne de* (Q) *par rapport à* (K) *soit également une génératrice de* (Q).

La condition est nécessaire. On sait, en effet, que si (Q) appartient à (K), elle contient une demi-quadrique formée de droites du complexe (K), lesquelles coïncident avec leurs conjuguées qui sont ainsi généra-

trices de (Q) et une autre demi-quadrique contenant des couples de droites conjuguées. Ceci est très connu.

La condition est suffisante. Pour le prouver, montrons qu'en chaque point M de (Q), l'une des deux génératrices rectilignes (Δ_1) et (Δ_2) qui y passent appartient à (K). Si (Δ_1) appartient à (K) le théorème est vrai. Supposons que (Δ_1) ne soit pas une droite de (K), par hypothèse, sa conjuguée (Δ'_1) est génératrice de (Q); elle ne rencontre pas (Δ_1), donc elle est du même système que (Δ_1), par conséquent (Δ_2) coupe (Δ_1) et (Δ'_1). Coupant deux droites conjuguées, c'est une droite du complexe (K).

Nous utiliserons ce théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une quadrique (Q) *appartienne à un complexe linéaire* (K) *est que la conjuguée par rapport à* (K) *de toute droite tangente à* (Q) *soit également tangente à* (Q).

La condition est nécessaire. Soit M un point de (Q) où se coupent les deux génératrices (G) et (g), la dernière faisant partie du complexe (K). Si (D) est tangente en M à (Q), (D), (G) et (g) passent par un même point et sont dans un même plan; il en est donc de même de leurs conjuguées (D'), (G') et (g). D'après le théorème précédent, (G') est génératrice de (Q); et (D') rencontrant en M' les deux génératrices (G') et (g), et étant dans leur plan, est tangente à (Q) en M'.

La condition est suffisante. Il suffit de remarquer qu'elle entraîne que la conjuguée de toute génératrice rectiligne de (Q) soit également tracée sur (Q) et la proposition précédente montre que la condition est suffisante. Directement : par hypothèse, la conjuguée (Δ') de toute droite (Δ) passant par M point de (Q) et située

dans le plan (π) tangent à (Q) en M est tangente en (M′) à (Q). Ces conjuguées (Δ') sont dans le plan polaire (π') de M et passent par le pôle M′ de (π). La droite MM′ tangente à (Q) en M et en M′ est génératrice de (Q), car c'est une droite [1] du complexe (K). Donc, par tout point de (Q), il passe une génératrice de (Q) appartenant à (K).

27. Soit p_{ik} et p'_{ik} les coordonnées des deux droites conjuguées par rapport au complexe linéaire (K_1) d'équations $p_{03}+p_{12}=0$, p_{ik} et p'_{ik} sont égaux sauf pour les valeurs (03) et (12) des indices pour lesquelles on a

$$p'_{03}=-p_{12}, \qquad p'_{12}=-p_{03}.$$

Pour écrire qu'une quadrique (Q) d'équation

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{ij} x_i x_j = 0 \quad (a_{ij}=a_{ji};\ i, j = 0, 1, 2, 3)$$

appartient au complexe (K_1), il suffit d'écrire que si une droite de coordonnées p_{ik} est tangente à (Q), sa conjuguée par rapport à (K) de coordonnées p'_{ik} est également tangente à (Q). Or on sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite de coordonnées pluckériennes p_{ik} soit tangente à (Q) s'exprime aisément, au moyen d'une relation entre les p_{ik}, par la considération de la *deuxième adjointe* de la forme f. Cette équation tangentielle de la quadrique (Q) en coordonnées de droites s'écrit :

$$\Psi(p_{ik}) = \Sigma p_{ik}^2 (a_{ii} a_{kk} - a_{ik}^2)$$
$$+ 2\Sigma (a_{hi} a_{lk} - a_{hk} a_{li}) p_{hl} p_{ik} = 0,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs des indices

---

[1] Si M′ et M étaient confondus, les droites passant par M et situées dans (π) appartiendraient toutes à (K), en particulier ce serait vrai pour les génératrices rectilignes passant par M.

telles que p_{ik} soit différent de p_{hl}. Si (Q) appartient au complexe (K_1) et si l'équation précédente $\Psi = 0$ est vérifiée par six nombres p_{ik}, elle l'est aussi pour les six nombres p_{01}, p_{23}, p_{02}, p_{31}, $-p_{12}$, $-p_{03}$. En écrivant cela, on trouve les conditions nécessaires et suffisantes pour que (Q) appartienne à (K_1); ce sont les cinq relations suivantes entre les coefficients a_{ij} de la forme quadratique f :

$$(\rho_1)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a_{00}a_{33} - a_{03}^2, \\ a_{00}a_{13} - a_{11}a_{02} - a_{01}(a_{03} - a_{12}) = 0, \\ a_{33}a_{02} - a_{22}a_{13} - a_{23}(a_{03} - a_{12}) = 0, \\ a_{11}a_{23} + a_{01}a_{33} - a_{13}(a_{03} + a_{12}) = 0, \\ a_{00}a_{23} + a_{01}a_{22} - a_{02}(a_{03} + a_{12}) = 0. \end{array}\right.$$

En tenant compte de ces relations, on vérifie aisément que le discriminant de la forme f [ou de la quadrique (Q)] est le carré de la quantité

$$\delta = a_{00}a_{33} - a_{03}^2 + a_{01}a_{23} - a_{02}a_{31}.$$

28. Un calcul analogue au précédent permet de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une quadrique (Q) appartienne au complexe [1] (K_n) d'équation $p_{03} + np_{12} = 0$. On doit écrire que si l'équation $\Psi = 0$ est satisfaite pour six nombres p_{ik}, elle l'est également pour p_{01}, p_{23}, p_{02}, p_{31}, $-np_{12}$, $-\dfrac{p_{03}}{n}$ et l'on trouve les relations suivantes :

$$(\rho_n)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = n^2(a_{00}a_{33} - a_{03}^2), \\ a_{01}a_{12} - a_{02}a_{11} + n(a_{00}a_{31} - a_{01}a_{03}) = 0, \\ a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22} + n(a_{02}a_{33} - a_{03}a_{23}) = 0, \\ a_{01}a_{22} - a_{12}a_{02} + n(a_{00}a_{23} - a_{02}a_{03}) = 0, \\ a_{31}a_{22} - a_{11}a_{23} + n(a_{03}a_{31} - a_{01}a_{33}) = 0, \end{array}\right.$$

---

[1] On suppose n positif ou négatif, mais non nul.

qui sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que (Q) appartienne au complexe (K_n). Elles se réduisent pour $n = 1$ aux précédentes (§ 27). Le discriminant de la forme quadratique f dont les coefficients satisfont aux relations (ρ_n) est le carré de la quantité

$$\delta = n(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + a_{01}a_{23} - a_{02}a_{31}.$$

29. Nous pouvons facilement déduire de toute l'étude précédente le théorème que nous avions en vue d'établir :

Si une quadrique à coefficients entiers appartient à un complexe linéaire arithmétique *spécial ou non, son discriminant est carré parfait.*

Si le complexe est spécial, c'est-à-dire si la quadrique admet parmi ses génératrices rectilignes une droite arithmétique, nous avons déjà établi cette proposition (§ 25).

S'il est non spécial, soit n son invariant, il existe une substitution arithmétique du premier degré le changeant en (K_n) et changeant la quadrique en une autre de même discriminant et appartenant à (K_n). Le discriminant de celle-ci étant nécessairement carré parfait, la proposition est établie.

On peut ne faire appel qu'à l'équivalence dans une substitution arithmétique de degré n de tout complexe d'invariant n au complexe (K_1) (§ 13). En effet, si la quadrique (Q) de discriminant Δ appartient à un complexe arithmétique (K) d'invariant n, la substitution (S) de degré n changeant (K) en (K_1) change (Q) en une quadrique (Q') d'équation $f' = 0$, f' étant la transformée de la forme f premier membre de l'équation de (Q) par (S). Le discriminant $n^2\Delta$ de f' est carré parfait (§ 27). Δ devant être entier est nécessaiment carré parfait.

30. Les formes quadratiques f, en désignant ainsi les premiers membres des équations des quadriques appartenant à un complexe arithmétique, sont donc des formes très particulières, puisque leur discriminant est carré parfait. Cependant, une quadrique appartient à des complexes linéaires en nombre égal à celui des points d'un plan, si nous assujettissons ses coefficients à être rationnels, il semble bien qu'il y ait beaucoup de chances pour que, parmi cette infinité de complexes, il y en ait un à coefficients rationnels. Il n'en est rien et les quadriques appartenant à un complexe arithmétique sont exceptionnelles ; les formes f constituent une classe remarquable mais très spéciale de formes quadratiques à quatre indéterminées [1].

L'extension à la théorie des formes de l'équivalence, entendue au sens de cette Note, conduit à la réduction des formes f, mais si l'on ne veut pas sortir du domaine des quantités rationnelles (droites et complexes arithmétiques, etc.), on ne peut pas aborder l'étude des formes dont le discriminant n'est pas carré parfait.

31. On peut poursuivre l'étude arithmétique de l'espace réglé d'après les principes qui nous ont guidé dans l'étude du complexe arithmétique. Les congruences arithmétiques (système à deux termes dont les deux complexes de base sont arithmétiques) donnent des résultats simples et intéressants par leur liaison avec la théorie des formes binaires, en même temps leurs directrices introduisent des droites dont les six coordonnées sont des nombres algébriques d'un même corps.

---

[1] Cette proposition a été signalée incidemment aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (*Sur une classe de formes quadratiques liées à la transformation des fonctions abéliennes*, 5 février 1912) et est sans doute nouvelle.

Les systèmes à trois termes arithmétiques sont une nouvelle façon de concevoir les quadriques $f = 0$ et l'équivalence des formes f; nous ne pouvons y insister.

Enfin, ce que nous faisons dans le domaine des entiers ordinaires peut être repris dans un corps algébrique quelconque, mais il ne faut pas oublier que ces études sont surtout intéressantes par leurs applications et c'est pourquoi nous nous limitons à des propositions, parce qu'elles ont aujourd'hui leur place marquée dans une introduction à l'étude des transformations abéliennes, des fonctions abéliennes ordinaires et singulières et des formes abéliennes.

[O5a] et [C2g]

SUR LES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES INTÉGRALES CURVILIGNES

(SECONDE NOTE);

PAR M. A. BUHL.

1. Considérons le volume appelé U_z dans mes précédents travaux, volume classique compris dans un cylindre de génératrices parallèles à Oz, limité inférieurement par le plan Oxy et supérieurement par une cloison S découpée dans une certaine surface

$$z = f(x, y).$$

Je me propose de montrer ici que, si la surface S est la surface intégrale de certaines équations aux dérivées partielles mises sous forme convenable, le volume U_z, qui est d'ordinaire une intégrale double, peut s'ex-

primer au moyen d'une intégrale de ligne attachée au contour Σ de la cloison S. Cela d'une manière pratique et intéressante qui constitue une application nouvelle de la formule de Stokes.

Je commence par rappeler que j'écris d'ordinaire la formule de Stokes sous la forme symbolique

$$\int_\Sigma \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz = \int\int_\mathrm{S} \begin{vmatrix} -p & -q & +1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix} dx\,dy.$$

Ceci posé, soit une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre

$$\Theta = \begin{vmatrix} -p & -q & +1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix} - \Phi(x, y, z) = 0,$$

où p et q sont, suivant l'usage, les dérivées partielles de la fonction inconnue z. Quant à P, Q, R, ce sont, comme Φ, des fonctions quelconques de x, y, z.

Il est clair que si la cloison S est découpée sur une surface intégrale de $\Theta = 0$ on a identiquement

$$\int\int_\mathrm{S} \Theta\,dx\,dy = 0.$$

D'autre part, en vertu de la formule de Stokes, cette égalité peut s'écrire

$$(1) \qquad \int\int_\mathrm{S} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy = \int_\Sigma \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz.$$

Tel est le résultat très simple sur lequel est bâti tout ce qui suit. On voit qu'*il y a des intégrales doubles, attachées à des surfaces* S *intégrales de l'équa-*

tion $\Theta = 0$, qui s'expriment immédiatement par une intégrale de ligne.

En particulier, supposons que la fonction arbitraire Φ se réduise à z. Alors le premier membre de (1) représentera le volume U_z et l'on aura

$$U_z = \int_\Sigma P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

2. Continuons à prendre $\Phi = z$ et demandons-nous si toute équation

$$pF + qG = H, \tag{2}$$

où F, G, H sont des fonctions quelconques de x, y, z, peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} -p & -q & +1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} - z = 0. \tag{3}$$

Si l'on multiplie (2) par un facteur μ, l'identification donne

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \mu F, \\ &\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \mu G, \\ &\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \mu H + z. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Or, ces relations permettent de déterminer P, Q, R si μ satisfait préalablement à l'équation

$$\frac{\partial(\mu F)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu G)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu H)}{\partial z} + 1 = 0. \tag{5}$$

Il y a une analogie de forme très manifeste entre cette équation et celle d'où dépend le multiplicateur de

Jacobi de (2). L'équation du multiplicateur ne diffère de (5) que par l'absence, dans le premier membre, du terme $+1$.

Imaginons donc que l'on tire μ de (5) [ce qui demande des calculs d'intégration qui sont déjà presque complètement effectués quand on intègre (2)] puis ensuite P, Q, R des équations (4), et finalement on aura l'expression de U_z donnée à la fin du paragraphe précédent. Il ne reste plus qu'à montrer, sur des exemples, que ces expressions de U_z sont intéressantes. [Cf. *Atti della Accademia di Torino*, t. XXXII, 1897, p. 597. (Lettre de M. E. Picard à M. V. Volterra.)]

3. *Premier exemple.* — Considérons les surfaces dont le plan tangent en $M(x, y, z)$ coupe Oz en un point T tel que $OT = mz$. Ce sont des cas particuliers des surfaces de M. Jamet pour lesquelles OT est une fonction quelconque de z; ici m est une constante.

On a l'équation aux dérivées partielles

$$px + qy = (1 - m)z \tag{6}$$

qui donne immédiatement pour intégrale générale

$$zy^{m-1} = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{7}$$

f étant une fonction arbitraire. Donc ici nous avons

$$F = x, \qquad G = y, \qquad H = (1 - m)z$$

et l'équation (5) devient

$$x\frac{\partial\mu}{\partial x} + y\frac{\partial\mu}{\partial y} + (1 - m)z\frac{\partial\mu}{\partial z} + (3 - m)\mu + 1 = 0.$$

Pour tirer μ de celle-ci, il faut d'abord écrire les

équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{(1-m)z} = \frac{d\mu}{\mu(m-3)-1}.$$

Or, c'est ici le moment d'attribuer toute son importance à la remarque mise entre crochets au paragraphe précédent. Ces équations différentielles, au dernier membre près, sont celles qu'il a fallu écrire pour intégrer (6). Pour obtenir μ il n'y a donc qu'à poursuivre un calcul déjà très avancé, ce qui en vaut bien la peine si nous obtenons ainsi une remarquable formule de cubature pour des volumes attachés aux surfaces (7) intégrales de l'équation (6).

Dans le cas qui nous occupe on peut prendre simplement

$$\mu = \frac{1}{m-3}.$$

Certes, on pourrait introduire dans μ une fonction arbitraire, mais sans bénéfice pour la généralité, car cette fonction arbitraire ne figurerait finalement que dans des différentielles exactes figurant elles-mêmes dans des intégrales de ligne fermée, d'où des termes identiquement nuls.

On peut tirer maintenant des formules (4)

$$P = \frac{yz}{m-3}, \qquad Q = -\frac{xz}{m-3}, \qquad R = 0,$$

et l'on obtient finalement

$$U_z = \frac{1}{3-m}\int_{\Sigma} z(x\,dy - y\,dx). \tag{8}$$

Telle est l'expression du volume U_z attaché à une cloison faisant partie d'une surface du type (7).

4. Comme vérification partielle de la formule (8)

on peut facilement employer cette formule à l'évaluation de quelque volume simple dont l'expression serait connue à l'avance.

D'abord, dans les surfaces (7), pour $m = 0$, on peut comprendre les plans

$$z = x \operatorname{tang} \alpha,$$

où α est un angle donné. D'autre part, dans le plan Oxy, considérons le cercle

$$x - a = R \cos\varphi, \qquad y = R \sin\varphi$$

qui sert de base à un cylindre droit limité supérieurement par le plan précédent.

Il suffit de faire la figure pour y voir immédiatement que le volume compris dans ce cylindre est $\pi R^2 a \operatorname{tang} \alpha$. Et l'application de la formule (8) conduit au même résultat.

5. *Remarques sur un cas singulier.* — La formule (8), obtenue au n° 3, ne conserve point sa forme si $m = 3$. Dans ce cas, l'équation (7) montre qu'il s'agit des surfaces

$$zy^2 = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{9}$$

L'équation différentielle qui déterminait μ est à remplacer par

$$\frac{dz}{2z} = d\mu,$$

d'où

$$\mu = \frac{1}{2} \log z.$$

Alors les seconds membres des équations (4) deviennent respectivement

$$\frac{x}{2} \log z, \qquad \frac{y}{2} \log z, \qquad z - z \log z,$$

et l'on a

$$P = \frac{y}{2}(z \log z - z), \qquad Q = -\frac{x}{2}(z \log z - z), \qquad R = 0;$$

d'où

$$U_z = \frac{1}{2}\int_{\Sigma}(z \log z - z)(y\,dx - x\,dy).$$

Mais

$$z(y\,dx - x\,dy) = f\left(\frac{y}{x}\right) d\left(\frac{x}{y}\right)$$

et, à ce terme qui est une différentielle exacte, doit correspondre, dans l'intégrale précédente, un terme nul. Finalement

$$(10) \qquad U_z = \frac{1}{2}\int_{\Sigma} z \log z (y\,dx - x\,dy).$$

N'aurait-on pas pu, sans recommencer le raisonnement, déduire cette formule de (8) en faisant tendre m vers 3 ? Il est fort curieux de remarquer que la chose est possible et peut résulter d'une application de la règle de l'Hospital dans une circonstance où il ne serait peut-être pas toujours prudent de l'appliquer sans précautions.

Le second membre de (8), pour $m = 3$, est une expression de la forme 0 : 0, car l'intégrale porte alors sur l'expression

$$f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x\,dy - y\,dx}{y^2}$$

qui est une différentielle exacte. Reprenons donc le second membre de (8) en l'écrivant

$$\frac{1}{3 - m}\int_{\Sigma} y^{1-m} f\left(\frac{y}{x}\right)(x\,dy - y\,dx).$$

Il y a bien là un rapport de deux expressions en m : remplaçant les deux termes du rapport par leurs déri-

vées prises par rapport à m, il vient

$$\int_\Sigma y^{1-m} \log y\, f\left(\frac{y}{x}\right)(x\,dy - y\,dx),$$

ce qui est déterminé quand m tend vers 3. D'après (9)

$$\log y = \frac{1}{2}\log f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\log z,$$

et, en supprimant encore les différentielles exactes qui s'introduisent sous le signe somme, notre dernière intégrale redonne exactement la forme (10) de U_z.

6. *Deuxième exemple.* — Soient maintenant les surfaces telles que la normale et l'ordonnée d'un point $M(x, y, z)$ coupent le plan Oxy en des points N et P tels que le triangle ONP ait une aire constante. Si k^2 désigne le double de cette aire triangulaire, ces surfaces ont pour équation aux dérivées partielles

$$z(py - qx) = k^2.$$

Elles rentrent, comme cas particulier, dans d'autres surfaces que j'ai déjà étudiées dans mes Notes *Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures* (*Nouvelles Annales*, 1908, 1909, 1910).

Ici, remarquons simplement qu'on a une généralisation des surfaces de révolution, ces dernières correspondant à $k = 0$.

On intègre très facilement l'équation précédente; l'intégrale générale, avec la fonction arbitraire f, est

$$z^2 = f(x^2 + y^2) - 2k^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}. \tag{11}$$

Nous avons ensuite

$$F = y, \qquad G = -x, \qquad H = \frac{k^2}{z}$$

et l'équation (5) est ici

$$y\frac{\partial\mu}{\partial x} - x\frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{k^2}{z}\frac{\partial\mu}{\partial z} = \frac{k^2}{z^2}\mu - 1.$$

Il suffit d'en tirer

$$\mu = -\frac{z^2}{k^2},$$

et les formules (4) donnent ensuite

$$P = \frac{xz^3}{3k^2}, \qquad Q = \frac{yz^3}{3k^2}, \qquad R = 0.$$

Donc

$$(12) \qquad U_z = \frac{1}{3k^2}\int_\Sigma z^3(x\,dx + y\,dy).$$

Telle est l'expression du volume U_z attaché à une cloison faisant partie d'une surface du type (11).

7. *Cas singulier.* — Si les surfaces (11) donnent manifestement les surfaces de révolution pour $k = 0$ il semble, au premier abord, que la formule de cubature (12) ne puisse plus être appliquée à ce cas. La difficulté est complètement analogue à celle du paragraphe 5.

Récrivons le second membre de (12) sous la forme

$$\frac{1}{3k^2}\int_\Sigma \left[f(x^2+y^2) - 2k^2 \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right]^{\frac{3}{2}}(x\,dx + y\,dy).$$

Pour $k = 0$, l'expression sous le signe somme devient une différentielle exacte et, par suite, le tout prend la forme $0:0$. Appliquons encore la règle de l'Hospital et nous aurons

$$-\int_\Sigma \left[f(x^2+y^2) - 2k^2 \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right)(x\,dx + y\,dy),$$

ce qui, pour $k = 0$, donne

$$(13) \qquad U_z = -\int_\Sigma z\left(\text{arc tang}\,\frac{y}{x}\right)(x\,dx + y\,dy).$$

Or, c'est bien là une formule de cubature relative aux surfaces de révolution, car, en coordonnées semi-polaires, elle s'écrit

$$U_z = -\int_\Sigma z\,\theta\,r\,dr,$$

et est alors susceptible d'une vérification immédiate.

On voit que des formules de cubature jugées très simples, telles (13), peuvent être considérées comme cas limites de formules plus simples encore, telles (12).

8. *Remarque sur les fonctions de ligne.* — Il est facile de rattacher ce qui précède, et mieux encore les résultats de ma première Note, à la notion de *fonction de ligne* si brillamment développée et utilisée par M. Vito Volterra.

Ainsi, avec les volumes U_z j'ai considéré aussi U_x et U_y, volumes analogues limités par des cylindres de génératrices respectivement parallèles à Ox et Oy.

Quand ces trois volumes sont attachés à une même cloison S de contour Σ, on a

$$U_x - U_y = \int_\Sigma xy\,dz,$$

$$U_y - U_z = \int_\Sigma yz\,dx,$$

$$U_z - U_x = \int zx\,dy.$$

Évidemment, ces différences de volumes ne dépen-

dent que de la ligne fermée Σ; *ce sont des fonctions de cette ligne*. Et elles sont bien exprimées, comme le fait M. Volterra, par des intégrales de ligne qui, dans le cas précédent, sont des cas très particuliers de celle qui figure dans la formule de Stokes.

On pourrait faire des remarques analogues pour toutes les différences de volumes considérées dans ma première Note et, plus généralement, dans mon Mémoire *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1910).

Dans ce qui précède les choses sont un peu plus particularisées. Les volumes U_z considérés maintenant ne sont plus fonctions d'une ligne absolument quelconque, mais d'une ligne tracée sur une surface intégrale d'une équation aux dérivées partielles.

Dans les deux cas on peut imaginer que la ligne est représentée par des équations telles que

$$f(x, y) = 0, \qquad z = F(x, y).$$

La fonction F se particularise dans le second cas, mais en dépendant toujours d'une fonction arbitraire.

9. A propos de la Note précédente et particulièrement de son paragraphe 4, reprenons la demi-boucle sphérique de la courbe de Viviani. Nous avons calculé les volumes U_x, U_y, U_z correspondants, volumes qui, retranchés du huitième de sphère, donnent les excès

$$\frac{13}{45}R^3, \quad \frac{22}{45}R^3, \quad \frac{10}{45}R^3.$$

Or ces trois nouveaux volumes ont une somme exactement égale à R^3. Ce résultat, qu'il est intéressant de mentionner en passant, peut aller avec les théorèmes de rationalité de Viviani. Il a été remarqué par l'un

de mes élèves de la Faculté des Sciences de Toulouse, M. A. Sorano.

10. *Généralisations.* — Les généralisations de ce qui précède sont aisées à apercevoir, mais elles sont moins élémentaires. Je me borne donc ici à les indiquer en quelques mots.

Supposons que, dans l'équation $\Theta = 0$ du paragraphe 1, on introduise p et q dans la fonction Φ. Admettons même, pour prendre un exemple particulièrement élégant, que

$$\Phi = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Nous pourrions former ainsi des équations aux dérivées partielles, sur les surfaces intégrales desquelles on pourrait prendre des cloisons dont l'aire gauche s'exprimerait immédiatement par une intégrale attachée au contour de cette cloison.

On pourrait également partir non de la formule de Stokes ordinaire, mais d'extensions de cette formule où figureraient les dérivées partielles $p, q, r, s, t, \ldots$, si bien qu'on pourrait chercher, pour des équations de formes très quelconques, des résultats analogues à ceux obtenus ici pour l'équation linéaire du premier ordre.

[$O^1 6k$]

SUR LA DÉFORMATION INFINIMENT PETITE DES SURFACES RÉGLÉES A PLAN DIRECTEUR;

PAR M. E. GUILLEMAIN, à Clermont-Ferrand.

Je me propose de résumer ici quelques résultats obtenus en étudiant la déformation infiniment petite

des surfaces réglées à plan directeur, en renvoyant lorsque les démonstrations seront analogues, au Mémoire de M. Haag, traitant le cas des surfaces réglées quelconques, et paru aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

1. Je partirai des formules de Lelieuvre (*voir* Mémoire cité § 1) : dans le cas à étudier, je prendrai le plan des xy parallèles aux génératrices (G) de la surface (S). Un point quelconque M de la surface sera défini par l'angle polaire α de la projection (g) de (G) sur xOy et par un deuxième paramètre β.

Par l'origine, menons une parallèle $O\lambda$ à la normale au point M de (S) ; θ_1, θ_2, θ_3 seront les coordonnées d'un point P de $O\lambda$, et si l'on désigne par λ et μ deux fonctions de α, s, on voit facilement qu'on a

$$\theta_1 = -\lambda \sin\alpha,$$
$$\theta_2 = \lambda \cos\alpha,$$
$$\theta_3 = \mu.$$

D'autre part, on sait que θ_1, θ_2, θ_3 vérifient une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\, \partial\beta} = K\theta.$$

Écrivons cette condition pour θ_1 et θ_2, on obtient

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sin\alpha \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial\alpha\, \partial\beta} - K\lambda \right) + \cos\alpha \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = 0, \\ &\cos\alpha \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial\alpha\, \partial\beta} - K\lambda \right) - \sin\alpha \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = 0. \end{aligned} \right.$$

Le système (2), considéré comme système d'équations

homogènes, admet comme solution

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial\beta} = 0, \\ \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta} - K\lambda = 0. \end{cases}$$

La première équation (3) nous donne $\lambda = f(\alpha)$, nous poserons $\lambda = -R$; l'autre, comme λ n'est pas nul, montre que l'on a $K = 0$.

En écrivant que θ_3 vérifie (1), on obtient

$$\theta_3 = S + T,$$

S et T étant respectivement des fonctions de α et de β, un raisonnement très simple montre que T ne peut ni être nul, ni être constant, sans quoi (S) serait développable, on peut donc, par un changement convenable de paramètres, prendre $T = \beta$, et l'on aura

$$(4)\qquad \begin{cases} \theta_1 = \quad R\sin\alpha, \\ \theta_2 = -R\cos\alpha, \\ \theta_3 = \quad S + \beta. \end{cases}$$

Portant ces valeurs dans les formules de Lelieuvre, on obtient, pour la surface (S), les équations suivantes :

$$(S)\quad (5)\qquad \begin{cases} x = R(S+\beta)\cos\alpha - 2\displaystyle\int S'R\cos\alpha\,d\alpha, \\ y = R(S+\beta)\sin\alpha - 2\displaystyle\int S'R\sin\alpha\,d\alpha, \\ z = \displaystyle\int R^2\,d\alpha. \end{cases}$$

La surface (S_1) qui lui correspondra avec orthogonalité des éléments s'obtiendra en prenant

$$\omega = A + B,$$

A et B étant respectivement des fonctions de α et

de β :

$$(S_1)\quad (6)\quad \begin{cases} x_1 = -(A+B)R\sin\alpha + 2\int A'R\sin\alpha\, d\alpha, \\ y_1 = (A+B)R\cos\alpha - 2\int A'R\cos\alpha\, d\alpha, \\ z_1 = -(A+B)S \\ \qquad + (A-B)\beta + 2\int B\, d\beta + 2\int SA'\, d\alpha. \end{cases}$$

On peut d'ailleurs se débarrasser de la quadrature $\int B\, d\beta$ en posant

$$B = B'_1.$$

Les formules (5) montrent que, si l'on change β en $\beta + C$, C étant une constante, il suffit de modifier S pour avoir la même surface. De même, si l'on remplace β par $C\beta$, il suffit de multiplier les fonctions R et S par C pour avoir une surface homothétique de (S) dans le rapport C^2; donc, on pourra, sans changer la nature de (S) dans les calculs ultérieurs, remplacer une expression de la forme $C\beta + D$ par β.

Les formules (5) donnent immédiatement certaines propriétés de (S). Ainsi, si ϖ désigne le paramètre de distribution en un point, on aura, au signe près,

$$\varpi = \frac{dz}{da} = R^2.$$

Donc, les surfaces telles que leur paramètre de distribution soit constant, seront données en prenant pour R *une constante.*

Des équations (5) on déduit facilement le théorème suivant : *Le segment intercepté par deux lignes asymptotiques quelconques sur une génératrice variable est proportionnel à la racine carrée du paramètre de distribution.*

Les coordonnées d'un point de la ligne de striction s'obtiendront en remarquant qu'en ce point le plan tangent à la surface (S) est parallèle à Oz. Donc

$$\theta_3 = 0 \quad \text{ou} \quad S + \beta = 0.$$

Ce qui donnera comme équations de (L) :

$$(7) \qquad \begin{cases} \xi = -2\int S' Q \cos\alpha \, d\alpha, \\ \eta = -2\int S' K \sin\alpha \, d\alpha, \\ \zeta = \int R^2 \, d\alpha. \end{cases}$$

Pour que la ligne de striction (L) *soit en même temps ligne asymptotique, il faudra qu'on ait*

$$S = \text{const.}$$

Dans ce cas, les surfaces (S) correspondantes seront des conoïdes droits.

Si l'on pose

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \rho^2,$$

on sait qu'on a (*voir* Mémoire cité § 6)

$$\rho^2 = -RR_1 \quad \text{et} \quad \rho^2 = \pm\tau,$$

R et R_1 désignant les rayons de courbure principaux au point M de (S) et τ désignant le rayon de torsion de la ligne asymptotique passant par M. Les formules (5) permettent, en suivant une méthode analogue à celle adoptée par M. Haag dans son Mémoire, de vérifier toutes ces propriétés, et donnent en particulier

$$\rho^2 = -\tau.$$

Si l'on désigne par h la distance M_0M d'un point M de (G) au point central, on retrouve la formule donnée

dans le cas général

$$h^2 + \varpi^2 = r\varpi,$$

qui permet de construire le rayon de torsion en un point d'une ligne asymptotique β.

Étude de S_1. — Les propriétés de (S_1), qui semblent intéressantes, sont relatives aux lignes (α). *A priori*, celles-ci doivent être planes et le plan de chacune d'elles est perpendiculaire à la génératrice correspondante de (S). En effet, si l'on pose

$$2\int A'R \sin\alpha \, d\alpha = u, \qquad -2\int A'R \cos\alpha \, d\alpha = v,$$
$$2\int A'R \, d\alpha = w,$$

on obtient

$$(x_1 - u)\cos\alpha + (y_1 - v)\sin\alpha = 0. \tag{8}$$

Lorsque α varie, le plan représenté par (8) enveloppe un cylindre parallèle à Oz, et dont l'équation ne dépend que d'une fonction arbitraire A lorsque la surface (S) est choisie; voyons si l'on peut déterminer A de façon à faire coïncider ce cylindre avec un cylindre arbitraire parallèle à Oz.

Il faut qu'on ait

$$u\cos\alpha + v\sin\alpha = p, \tag{9}$$

p étant la fonction définissant le cylindre arbitraire.

En dérivant deux fois la relation (9), on tire

$$2RA' = -(p + p'') = \rho,$$

ρ désignant le rayon de courbure de la base du cylindre donné; donc *se donner la développable, c'est se donner la fonction* A′ *et par suite* A *à une constante près qu'on peut faire rentrer dans* B.

Je dis que si une ligne particulière (α) *est une droite, il en est de même pour toutes les autres et* (S) *est développable.*

Pour cela, cherchons l'équation d'une ligne (α) dans son plan. On trouve

$$X = R(A + B),$$
$$Z = -(A + B)S + (A - B)\beta + 2\int B\, d\beta + 2\int SA'\, d\alpha.$$

Exprimant que le coefficient angulaire est constant

$$\frac{-B'(S + B) + A + B}{B'R} = K.$$

D'où, après intégration

$$B = \lambda\beta + \mu,$$

λ et μ constants.

D'après ce qu'on a vu, on peut prendre tout simplement $B = \beta$.

Les équations de (S_1) deviennent alors

$$x_1 = -(A + \beta)R \sin\alpha + u,$$
$$y_1 = \quad (A + \beta)R \cos\alpha + v,$$
$$z_1 = -(A + \beta)S + A\beta + w.$$

Sous cette forme, on voit manifestement que (S_1) est réglée.

En cherchant si les lignes (α) admettent une enveloppe, on trouve que (S_1) est développable et que son arête de rebroussement a comme équations

$$x = \quad 2\int SA' \sin\alpha\, d\alpha,$$
$$y = -2\int SA' \cos\alpha\, d\alpha,$$
$$z = \quad 2\int SA'\, d\alpha - A^2.$$

Surface (Σ). — Les coordonnées du point P de (Σ), homologue du point M, sont

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \xi + SR\cos\alpha - \frac{R\cos\alpha\left[(A-B)\beta + 2\int B\,d\beta + w\right] + (S+\beta)v}{A+B},\\ Y &= \eta + SR\sin\alpha - \frac{R\sin\alpha\left[(A-B)\beta + 2\int B\,d\beta + w\right] - (S+\beta)u}{A+B},\\ Z &= \zeta + \frac{v\sin\alpha + u\cos\alpha}{A+B}R; \end{aligned}\right.$$

si, dans les formules (10), on fait $B = \beta$ les équations de (Σ) deviennent

$$X = \xi + SR\cos\alpha - \frac{(RA\cos\alpha + v)\beta + R\cos\alpha\, w + Sv}{A+\beta},$$

$$Y = \eta + SR\sin\alpha - \frac{(u - RA\sin\alpha)\beta - uS - Rw\sin\alpha}{A+\beta},$$

$$Z = \zeta + \frac{R(v\sin\alpha + u\cos\alpha)}{A+\beta}.$$

Si l'on coupe par un plan quelconque, on obtient une équation du premier degré en β; donc les lignes $\alpha =$ const. sont des droites, et (ξ) est réglée.

Si dans les formules (10) on fait $A = 0$, les équations de (Σ) sont

$$X = \xi + R\cos\alpha\left[S + \beta - \frac{2\int B\,d\beta}{B}\right],$$

$$Y = \eta + R\sin\alpha\left[S + \beta - \frac{2\int B\,d\beta}{B}\right],$$

$$Z = \zeta.$$

On voit que le point P de (Σ) coïncide avec le point M′ de (S) obtenu en prenant

$$\alpha' = \alpha,$$

$$\beta' = \beta - \frac{2\int B\,d\beta}{B},$$

par conséquent, pour $A = 0$, (Σ) coïncide avec (S) et, par conséquent, est réglée,

Réciproquement, on démontre que si (Σ) est réglée, on se trouve dans un des deux cas examinés (*voir* Haag, Mémoire § 8).

Congruence G. — Pour étudier les congruences (G) dans le cas particulier des surfaces réglées à plan directeur, nous emploierons la méthode indiquée par M. Haag (Mémoire cité § 12), méthode basée sur ce que la droite MP, quand β varie seul, décrit une quadrique, et que, si l'on fait ensuite varier α, cette quadrique touche son enveloppe, suivant les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, qui sont D, D_1, d, d_1, car la méthode, consistant à associer à une surface (S) une surface (S_1) (*voir* Mémoire § 10) donne lieu à des calculs très compliqués et dissymétriques, dans le cas actuel.

Partons de la surface (S) donnée par les équations (5), et cherchons l'équation d'une quadrique (Q), se raccordant à (S) le long d'une génératrice (D), et contenant deux tangentes asymptotiques d, d_1. Nous écrirons ensuite que (Q) touche son enveloppe suivant ces deux droites.

Les équations de D sont

$$(D)\quad (11)\qquad \begin{cases} P \equiv R\sin\alpha(X-\xi) - R\cos\alpha(Y-\eta) = 0, \\ Q \equiv Z - \zeta = 0. \end{cases}$$

La tangente asymptotique (p), au point M se trouve dans le plan tangent en M d'équation

$$(12)\qquad P + (S+\beta)Q = 0.$$

D'autre part, un calcul simple montre que cette

droite est perpendiculaire à la direction définie par

$$R\cos\alpha + R'\sin\alpha,\quad R\sin\alpha - R'\cos\alpha,\quad S'.$$

Une deuxième équation de (d) sera donc

$$(R\cos\alpha + R'\sin\alpha)(X - x) + (R\sin\alpha - R'\cos\alpha)(Y - y) + S'(Z - z) = 0$$

que nous écrirons

$$M + S'Q - R^2(S + \beta) = 0.$$

En posant

$$M = (X - \xi)(R\cos\alpha + R'\sin\alpha) - (Y - \eta)(R\sin\alpha - R'\cos\alpha).$$

Les équations de (d) seront

$$(d)\quad (13)\quad \begin{cases} P + mQ = 0 \\ M + S'Q - mR^2 = 0 \end{cases} \qquad m = S + \beta,$$

celles de (d_1)

$$(d_1)\quad (14)\quad \begin{cases} P + nQ = 0, \\ M + S'Q - nR^2 = 0. \end{cases}$$

L'équation de la surface engendrée par les droites (d) est

$$(14')\qquad \Pi \equiv S'A^2 + MQ + R^2P = 0;$$

c'est un paraboloïde hyperbolique.

Pour former l'équation de la quadrique (Q), remarquons qu'elle fait partie du faisceau déterminé par le paraboloïde osculateur (π) et par le couple de plans

$$P + mQ = 0,$$
$$P + nQ = 0;$$

son équation sera

$$(15)\quad (S) \equiv S'Q^2 + MQ + R^2P + t(P + mQ)(P + nQ) = 0.$$

Il faut maintenant supposer t, m, n fonctions de α et

chercher la caractéristique de (Q). Avant de dériver (15) par rapport à α, remarquons qu'on a

$$(16)\quad \frac{\partial P}{\partial \alpha} = M, \quad \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = -R^2, \quad \frac{\partial M}{\partial \alpha} = \delta P + \frac{2K'}{R} M + 2S'R^2.$$

En posant

$$\delta = -1 + \frac{R''}{R} - \frac{2R'^3}{R^2}.$$

On aura alors, après avoir tenu compte des relations (16),

$$\begin{aligned} T \equiv Q\left[QS'' + \delta P + \frac{2R'}{R} M\right] + 2RR'P \\ + t'(P + mQ)(P + nQ) + t(P + nQ)[M + m'Q - mR^2] \\ + t(P + mQ)[M + n'Q - nR^2] = 0; \end{aligned}$$

suivant ensuite la méthode indiquée par M. Haag (Mémoire n° **12**), on voit qu'on doit avoir

$$T \equiv KS + (P + mQ)[g(P + nQ) + h(S'Q + M - nR^2)]$$

ou

$$\begin{aligned} T \equiv K(S'P^2 + MQ + R^2 P) \\ + (P + mQ)[l(P + nQ) + h(S'Q + M - nR^2)] \end{aligned}$$

en posant

$$l = g + kt.$$

Cette identité devant avoir lieu quels que soient P, Q, M.

En égalant les coefficients des termes semblables, nous obtenons les relations suivantes :

$$(17)\quad h = 2t, \qquad t' = l, \qquad k = \frac{2R'}{R} + (n - m)t.$$

$$(18)\quad S'' + t[nm' + mn' - S'(m + n)] = \frac{2R'}{R}.$$

$$(19)\quad \delta + t(m' + n' - 2S') = 0.$$

Les relations (18) et (19) sont les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que la quadrique (G) touche son enveloppe suivant un quadrilatère gauche. Les côtés D, d, d_1 auront respectivement comme équations (11), (13), (14); quant au côté (D_1), on trouve, en suivant la marche employée dans le cas général

$$(D_1)\quad (20)\quad \left\{\begin{aligned} &2t^2 P + \left[t' + \frac{2R'}{R}t + t^2(m-n)\right]Q + 2tR^2 = 0,\\ &\left[t' - \frac{2R'}{R}t + t^2(m+n)\right]P \\ &\qquad\qquad + 2t(S' + mnt)Q + 2tM = 0. \end{aligned}\right.$$

Examinons quelques cas particuliers obtenus en assujettissant le quadrilatère (Ω) à remplir certaines conditions.

Exigeons, par exemple, qu'il ait deux côtés confondus, qui doivent être des côtés opposés. Si ce sont D et D_1, on obtient

$$t = 0.$$

Dans ce cas (Q) coïncide avec le paraboloïde (π), les relations (18), (19) ne s'appliquent plus; il faut reprendre les calculs directement en cherchant à décomposer l'intersection de (π) avec la quadrique obtenue en déviant (14') par rapport à α. On trouve que le quadrilatère se compose des côtés D, D_1 confondus, d'un côté (d) à l'infini dans le plan $Q = 0$ et d'un quatrième côté à distance finie donné par

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &Q\left(S'' - \frac{2R'S'}{R}\right) + \delta P = 0,\\ &\delta(S'Q + M) + R(2R'S' - S'') = 0 \end{aligned}\right.$$

Imposons au paraboloïde (π) d'être équilatère, on devra avoir

$$S' = 0 \qquad \text{ou} \qquad S = C.$$

Les surfaces (S) seront donc des conoïdes droits, d'équations

$$x = R(\beta + C)\sin\alpha,$$
$$y = R(\beta + C)\sin\alpha,$$
$$z = \int R^2\, d\beta.$$

Proposons-nous de déterminer les surfaces (S), pour lesquelles le paraboloïde osculateur (π), relatif à chaque génératrice a son sommet sur cette génératrice.

Il suffit d'écrire que, si M est le sommet cherché, le plan tangent en ce point est perpendiculaire à la direction de l'axe. Cette direction est définie par

$$Q = 0,$$
$$M = 0.$$

Si nous écrivons que ces deux plans sont perpendiculaires au plan tangent, on aura

$$\begin{cases} S + \beta = 0, \\ RR' = 0. \end{cases}$$

La première des équations (22) donne la valeur de β définissant le sommet, l'autre donne $R^2 = C$.

Donc, les surfaces pour lesquelles le paraboloïde osculateur le long d'une génératrice a son sommet sur cette génératrice sont les surfaces (S) *pour lesquelles le paramètre de distribution est constant.*

En particulier, en appliquant à ces surfaces un théorème énoncé précédemment (p. 4), on voit *que deux lignes asymptotiques fixes déterminent, sur une génératrice variable, des segments égaux.*

[O¹2e]

GÉNÉRALISATION DES COURBES DE RIBAUCOUR;

Par M. Émile TURRIÈRE,

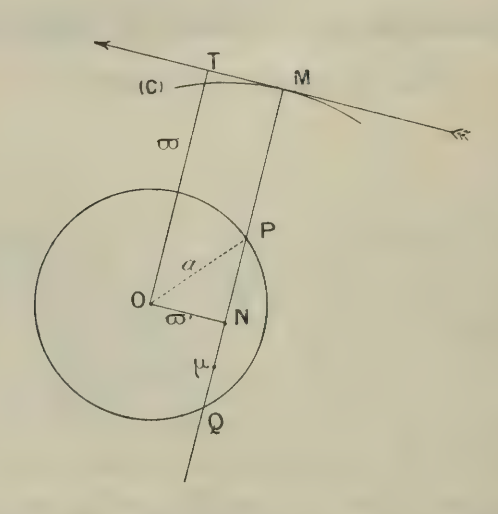
Dans son admirable *Étude sur les élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle* (1880), A. Ribaucour fut amené à utiliser des courbes qui avaient été considérées dès 1716 par Jean Bernoulli; ces courbes planes, qui portent le nom de *courbes de Ribaucour*, sont définies par la propriété suivante qui les caractérise : le rapport entre le rayon de courbure en un point et le segment de normale (limité au point de départ et à l'axe des x) est un nombre constant.

Je me propose de définir et d'étudier des courbes plus générales, qui sont, par rapport aux courbes de Ribaucour, ce que sont les tractrices circulaires de Morley-Bordoni à l'égard de la tractrice ordinaire.

Je considère un cercle fixe de centre O, origine des coordonnées et de rayon a. Je suppose que la normale à une courbe (C) du plan, en un quelconque M de ses points, rencontre la circonférence du cercle fixe aux deux points P et Q, et je pose la condition suivante : le rapport, entre le rayon de courbure R de (C) en M et l'un des deux segments MP ou MQ doit être constant (*fig.* 1).

En se reportant à une Thèse récente de M. L. Braude, *Ueber einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve* (Heidelberg, 1911), on peut dire que les courbes ici considérées sont celles dont une *développée imparfaite* est un cercle.

1. Tout d'abord, il y a lieu de s'occuper du cas où les deux rapports $\frac{R}{MP}$ et $\frac{R}{MQ}$ sont simultanément cons-



tants. Il en est de même alors du rapport $\frac{MP}{MQ}$. Quelles sont les courbes (C) pour lesquelles $\frac{MP}{MQ}$ est un rapport constant?

D'une façon générale, pour déterminer, de la manière la plus simple et la plus élégante à la fois, une courbe caractérisée par la relation imposée entre les deux segments MP et MQ, il suffit de considérer cette courbe inconnue (C), en coordonnées de Hesse, c'est-à-dire définie comme étant l'enveloppe de la droite variable d'équation

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = \varpi(\varphi);$$

ϖ est une fonction de l'azimut φ, admettant des dérivées des deux premiers ordres $\varpi' = \frac{d\varpi}{d\varphi}$ et $\varpi'' = \frac{d^2\varpi}{d\varphi^2}$. Des définitions géométriques de ϖ et de ϖ', qui sont respectivement les distances de O à la tangente et à la normale en M à la courbe (C), il résulte que l'on peut

poser, dans tous les cas de figure :

$$\mathrm{MP} = \varpi - \sqrt{a^2 - \varpi'^2},$$
$$\mathrm{MQ} = \varpi + \sqrt{a^2 - \varpi'^2};$$

lorsque MP et MQ seront liés par une condition imposée, la fonction ϖ sera définie par une équation différentielle qui ne contient pas la variable φ. On aura donc

$$d\varphi = f(\varpi)\, d\varpi,$$
$$\varphi = \int f(\varpi)\, d\varpi + \varphi_0,$$

la constante d'intégration φ_0 n'influant pas sur la forme de la courbe cherchée, qui est définie à une rotation près autour de O : il est d'ailleurs évident *a priori* que l'équation différentielle du problème admet la rotation autour de O comme transformation infinitésimale et doit, par conséquent, être intégrable par quadrature. Plus particulièrement, dans le cas d'une relation symétrique entre les deux segments, les calculs seront très simples, puisque $\mathrm{MP} + \mathrm{MQ}$ et $\mathrm{MP} \times \mathrm{MQ}$ ont pour expressions :

$$\mathrm{MP} + \mathrm{MQ} = 2\varpi,$$
$$\mathrm{MP} \times \mathrm{MQ} = \varpi^2 + \varpi'^2 - a^2.$$

C'est ainsi que la relation $\mathrm{MP} \times \mathrm{MQ} = \text{const.}$ s'exprime par une équation différentielle, dont l'intégrale singulière est une circonférence et dont l'intégrale générale est un point quelconque de cette circonférence. La relation linéaire la plus générale entre $\mathrm{MP} + \mathrm{MQ}$ et $\mathrm{MP} \times \mathrm{MQ}$ conduit aussi à des points et à des cercles; soit, en effet,

$$\mathrm{A}(\mathrm{MP} + \mathrm{MQ}) + \mathrm{B} \times \mathrm{MP} \times \mathrm{MQ} + \mathrm{C} = 0,$$

cette relation à coefficients constants A, B et C. Con-

sidérons une courbe (C') parallèle à la courbe cherchée (C). Soit M' le point de (C') qui correspond à (C), posons

$$MM' = K, \qquad M'P = MP + K, \qquad M'Q = MQ + K;$$

la relation précédente entraîne la suivante

$$(A - BK)(M'P + M'Q) + B \times M'P \times M'Q + C + BK^2 - 2AK = 0;$$

pour la courbe (C') particulière, qui correspond à la valeur

$$K = \frac{A}{B},$$

on a, par conséquent :

$$M'P \times M'Q = \text{const.}$$

Cette courbe (C') est, d'après ce qui précède, un point ou un cercle de centre O. La relation considérée caractérise donc les cercles du plan. C'est là une propriété qui peut être facilement établie par la méthode analytique. Dans le cas particulier

$$\frac{1}{MP} + \frac{1}{MQ} = \text{const.},$$

par exemple, l'équation prend la forme

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{d\varpi}{\sqrt{(\varpi - l)(m - \varpi)}};$$

d'où résulte l'expression suivante de ϖ en fonction de φ

$$\varpi = \frac{l + m}{2} + \frac{l - m}{2} \cos(\varphi - \varphi_0);$$

cette équation est caractéristique d'un cercle.

La condition $MP - MQ = \text{const.}$ caractérise évi-

demment la développante de cercle; la relation $\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 = \text{const.}$ caractérise la courbe transcendante d'équation

$$\varpi = K \operatorname{ch}(\varphi - \varphi_0),$$

qui se présente fréquemment dans les applications; la relation $\overline{MQ}^2 - \overline{MP}^2 = \text{const.}$ caractérise une courbe transcendante d'équation

$$\varpi^2 - a^2\varphi^2 = b^2,$$

et qui, par conséquent, généralise la développante de cercle; l'équation de cette développante est d'ailleurs celle que l'on obtient pour $b = 0$:

$$\varpi = a\varphi.$$

Revenant au cas $\frac{MP}{MQ} = \text{const.}$, l'équation différentielle correspondante est

$$\frac{a^2 - \varpi'^2}{\varpi^2} = \text{const.};$$

elle admet pour intégrale générale une *épicycloïde* d'équation

$$\varpi = \frac{a}{m} \sin m(\varphi - \varphi_0);$$

pour cette épicycloïde, le rayon de courbure

$$R = -(\varpi + \varpi'')$$

est, lui aussi, proportionnel à ϖ, de même que MP et MQ; par conséquent, *l'épicycloïde est la courbe la plus générale pour laquelle les deux rapports* $\frac{R}{MP}$ *et* $\frac{R}{MQ}$ *sont tous deux constants.* Cette propriété est une conséquence de la construction cinématique du centre de courbure de l'épicycloïde.

2. Abordons maintenant le cas général, pour lequel un seul des deux rapports est constant. Il serait possible de traiter le problème en coordonnées cartésiennes (ou polaires), d'effectuer un calcul analogue à celui par lequel A. Bordoni obtint l'équation de la tractrice circulaire (GINO LORIA, *Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 197) : l'emploi des coordonnées de Hesse conduira plus rapidement au but. J'ai, d'ailleurs, utilisé ces mêmes coordonnées pour la recherche de l'équation de la tractrice du cercle, dans un récent article *Sur les roulettes à base rectiligne*, inséré dans l'*Enseignement mathématique*.

Soit donc K le rapport constant du rayon de courbure Mμ et du segment MP de normale. L'équation différentielle des courbes (C) est

$$\text{(1)} \qquad \frac{\varpi + \varpi''}{\varpi - \sqrt{a^2 - \varpi'^2}} = \mathrm{K}.$$

Cette équation du second ordre ne contient pas φ, ce qui est évident, d'ailleurs, *a priori; r* désignant le rayon vecteur OM, défini par la relation

$$\varpi^2 + \varpi'^2 = r^2,$$

cette équation différentielle prend la forme d'une équation du premier ordre

$$\frac{dr}{d\varpi} = 2\mathrm{K}\left[\varpi - \sqrt{a^2 + \varpi^2 - r^2}\right];$$

par l'introduction de la nouvelle variable u que définit la relation

$$\text{(2)} \qquad r^2 = a^2 + \varpi^2 - u^2,$$

l'équation différentielle prend la forme homogène

$$u\frac{du}{d\varpi} = (1 - \mathrm{K})\varpi + \mathrm{K}u;$$

il suffit alors de poser

$$u = z\varpi$$

pour séparer les variables u et z;

$$\frac{d\varpi}{\varpi} = \frac{z\,dz}{1 - K + Kz - z^2} = \frac{-z\,dz}{(z-1)(z+1-K)};$$

lorsque K *est différent de* 2, on a

$$(2 - K)\frac{d\varpi}{\varpi} = \frac{dz}{z-1} + \frac{1-K}{z+1-K}\,dz;$$

d'où résulte l'expression de ϖ en fonction de z, ϖ_0 étant la constante d'intégration,

$$(3) \qquad \left(\frac{\varpi}{\varpi_0}\right)^{k-2} = (z-1)(z+1-K)^{1-K};$$

il vient ensuite

$$(4) \qquad u = z\varpi, \qquad \varpi'^2 = a^2 - u^2 = a^2 - z^2\varpi^2;$$

d'où découlent la relation entre φ, z et ϖ

$$d\varphi = \frac{d\varpi}{\sqrt{a^2 - z^2\varpi^2}},$$

et enfin la relation qui exprime φ en fonction de z par une quadrature

$$(5) \qquad \varphi - \varphi_0 = \pm\int \frac{z\,dz}{(z-1)(z+1-K)\sqrt{\frac{a^2}{\varpi_0^2}(z-1)^{\frac{2}{2-K}}(z+1-K)^{2\frac{1-K}{2-K}} - z^2}}.$$

Les formules (3) et (5) définissent ϖ et φ en fonction d'un paramètre auxiliaire z : l'intégrale générale (C) de l'équation différentielle (1) est donc déterminée; elle dépend d'une quadrature (5). Les formules (2) et (4) permettent de calculer le rayon vecteur r et la distance ϖ' de l'origine à la normale en fonctions de z.

Le problème peut donc être considéré comme complètement résolu.

Dans le cas singulier pour lequel K est égal à 2, l'équation différentielle prend la forme

$$\frac{d\varpi}{\varpi} = \frac{-z\,dz}{(z-1)^2},$$

d'où résulte l'expression de ϖ en fonction de z

$$(6) \qquad \varpi = \frac{\varpi_0}{z-1} e^{\frac{1}{z-1}};$$

cette équation (6) renferme l'équation (3); par la même méthode que précédemment on trouve l'équation (7), analogue à l'équation (5), qui définit φ en fonction de z au moyen d'une quadrature

$$(7) \quad \varphi - \varphi_0 = \pm \int \frac{z\,dz}{(z-1)^2 \sqrt{\frac{a^2}{\varpi_0^2}(z-1)^2 e^{-\frac{2}{z-1}} - z^2}}.$$

3. Génération cinématique des courbes précédentes. — Ossian Bonnet (*Journal de Liouville*, t. IX, 1844, p. 103) a donné l'équation

$$x = \int \left(y^{-\frac{2n}{n+1}} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} dy,$$

pour représenter la roulette décrite par le pôle de la courbe d'équation polaire

$$r^n = \sin n\theta,$$

lorsque celle-ci est le profil générateur roulant sur une base rectiligne; il résulte de ces équations que les *courbes de Ribaucour sont les roulettes du pôle des spirales sinusoïdes lorsque celles-ci roulent sur une base rectiligne* (Haton de la Goupillière, *Journal*

de l'École Polytechnique, 2[e] série, Cahier 15, 1911, p. 3 et 7).

Cherchons de même quelle courbe (Γ) doit rouler sur le cercle de centre O et de rayon a, considéré comme base fixe, pour qu'un point M, invariablement lié à (Γ), engendre une courbe (C) pour laquelle $\frac{R}{MP}$ soit constant ; soit ρ le rayon de courbure de (Γ) au point qui est venu en P ; soit D le diamètre du cercle des inflexions

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\rho};$$

la normale MP à la roulette de M rencontre le cercle des inflexions au centre instantané P et en un point $\mathfrak{I}$; le centre de courbure μ de la roulette (C) de M est sur MP et l'on a

$$\overline{MP}^2 = M\mathfrak{I} \times M\mu;$$

les rapports $\frac{M\mu}{MP}$ et $\frac{MP}{M\mathfrak{I}}$ sont constants. En rapportant la courbe mobile (Γ) au pôle M, soient r le rayon vecteur MP et V l'angle de la tangente en P avec ce rayon vecteur MP ; on a

$$M\mathfrak{I} = r - D \sin V;$$
$$r^2 = R(r - D \sin V);$$

On impose $\frac{R}{r} = K$; il en résulte

$$r(K-1) = KD \sin V,$$

$$(8) \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{\rho} = \frac{K}{K-1}\,\frac{\sin V}{r};$$

soient θ l'azimut qui repère le rayon vecteur MP par rapport à une direction fixe et σ l'abscisse curviligne sur la courbe (Γ) ; la relation générale

$$\sin V = r\frac{d\theta}{d\sigma}$$

permet donc d'écrire

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\rho} = \frac{K}{K-1}\,\frac{d\theta}{d\sigma};$$

$d\varphi$ étant, d'autre part, l'angle de contingence de la courbe (Γ), cette relation devient

$$\frac{d\sigma}{a} + d\varphi = \frac{K}{K-1}\,d\theta,$$

ou

(9)
$$\frac{\sigma}{a} + \varphi + \frac{K}{1-K}\,\theta = \text{const.}$$

Cette relation (9), lorsque a est infiniment grand, est la relation linéaire la plus générale entre l'azimut θ, l'angle φ qui repère la tangente par rapport à une direction fixe et l'angle V qui repère cette même tangente par rapport au rayon vecteur : les angles φ, θ, V sont en effet liés, en général, par une relation linéaire particulière; une relation linéaire quelconque entre ces trois angles peut donc être réduite à une relation entre deux quelconques d'entre eux. Une telle relation caractérise une classe de courbes étudiées par Fagnano et qui sont identiques aux spirales sinusoïdes (Gino Loria, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 471). Ce résultat est bien conforme à celui de Bonnet, puisque le cercle, base du roulement, est alors une droite.

La relation (9) caractérise donc des courbes qui constituent une curieuse généralisation des spirales sinusoïdes : *ces courbes sont celles pour lesquelles l'abscisse curviligne est une fonction linéaire générale des trois angles* θ, φ et V. Mais tandis que la relation analogue pour les spirales sinusoïdes ne permettait pas la rectification de ces courbes, cette relation (9) donne immédiatement la longueur d'un arc de la courbe (Γ) lorsqu'on connaît les extrémités de cet arc et les tangentes en ces points.

Toute circonférence passant par le pôle M appartient évidemment à cette classe de courbes : d'où il résulte de nouveau que les épicycloïdes sont des courbes (C) particulières.

4. Pour terminer, il convient de former l'équation de la courbe la plus générale qui satisfait à la relation (9). La courbe (Γ) étant supposée représentée en coordonnées polaires r et θ, le rayon de courbure ρ a pour expression

$$\rho = \pm \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''};$$

r' et r'' désignent les dérivées $\frac{dr}{d\theta}$ et $\frac{d^2 r}{d\theta^2}$. Il suffit de porter cette expression dans la relation

$$1 = \frac{A}{\rho} + B\frac{d\theta}{d\sigma}$$

qui s'obtient en différentiant la relation (9)

$$\sigma = A\varphi + B\,\delta\theta + \text{const.}$$

pour avoir l'équation différentielle du second ordre

$$(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}} = (A + B)(r^2 + r'^2) + A(r'^2 - rr''),$$

dont la courbe (Γ) est l'intégrale générale. Cette équation ne contient pas sous forme explicite la variable θ et se ramène donc immédiatement au premier ordre. Je poserai

$$r' = r \operatorname{sh} u;$$

l'équation différentielle devient

$$A\frac{d(\operatorname{ch} u)}{dr} = (A + B)\frac{\operatorname{ch} u}{r} - \operatorname{ch}^2 u,$$

elle est, par suite, linéaire en $\frac{1}{\operatorname{ch} u}$; l'expression de $\operatorname{ch} u$ en fonction de r est

$$\operatorname{ch} u = \frac{2A + B}{r + Cr^{-\frac{A+B}{A}}}, \tag{10}$$

C étant la constante arbitraire d'intégration; l'expression de θ, c'est-à-dire l'équation polaire de la courbe cherchée, est enfin définie par une quadrature

$$(11) \qquad \theta = \int \frac{\left(1 + C r^{-\frac{B}{A} - 2}\right) dr}{\sqrt{(2A + B)^2 - r^2\left(1 + C r^{-\frac{B}{A} - 2}\right)^2}};$$

en posant

$$-\frac{2A + B}{A} = m.$$

Ces expressions (10) et (11) prennent les formes plus simples

$$\operatorname{ch} u = \frac{-mA}{r(1 + C r^m)},$$

$$(12) \qquad \theta = \int \frac{1 + C r^m}{\sqrt{A^2 m^2 - r^2(1 + C r^m)^2}} dr.$$

Quel que soit le rapport m, pour $C = 0$, on a une intégrale particulière définie par la quadrature

$$\theta = \int \frac{dr}{\sqrt{A^2 m^2 - r^2}};$$

son équation est, par conséquent,

$$r = A m \sin(\theta - \theta_0);$$

c'est le cercle qui correspond à la solution épicycloïdale.

Les formules (10), (11) et (12) cessent d'avoir un sens lorsque m est nul. L'équation différentielle en ch u admet alors pour intégrale générale

$$\operatorname{ch} u = A \frac{\log(\gamma r)}{r},$$

γ désignant la constante arbitraire d'intégration ; d'où résulte l'équation polaire

$$(13) \qquad \theta = \int \frac{dr}{\sqrt{A^2[\log(\gamma r)]^2 - r^2}}$$

de la courbe qui doit servir de profil générateur. Ce cas correspond a celui qui avait été rencontré au 2° pour la valeur singulière $K = 2$. On a bien pour cette valeur de K la relation

$$2A + B = 0,$$

c'est-à-dire $m = 0$.

Haton de la Goupillière a remarqué que la spirale logarithmique est la limite d'une famille de courbes spirales sinusoïdes, et peut être considérée comme étant la spirale sinusoïde d'indice zéro (Allégret, *Nouvelles Annales*, 1872, p. 163). Les courbes (12) qui constituent une généralisation des spirales sinusoïdes admettent de même la courbe (13) comme courbe limite.

SOLUTION DE QUESTION PROPOSÉE.

2184.

(1911, p. 480.)

Le lieu du milieu des cordes d'une parabole de longueur $2l$ et le lieu des pôles de ces cordes sont deux courbes du quatrième degré asymptotes à la parabole. L'aire comprise entre ces deux courbes est finie et égale à πl^2, et reste la même pour n'importe quelle parabole.

Cette aire est partagée en deux parties égales par la parabole. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

Soient $A(x_1\ y_1)$, $B(x_2\ y_2)$ les extrémités d'une corde de la parabole $y^3 = 2px$.

Les coordonnées du milieu de cette corde sont

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

on a

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4l^2,$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 + y_2 \quad = 2y \\ y_1^2 + y_2^2 \quad = 4px \\ (y_1^2 - y_2^2)^2 + 4p^2(y_1 - y_2)^2 = 16p^2 l^2. \end{array}\right.$$

Éliminons y_1, y_2, il vient

$$2px = y^2 + \frac{l^2 p^2}{y^2 + p^2},$$

courbe facile à construire. Elle est de degré quatre.

L'aire comprise entre cette courbe et la parabole est

$$\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l^2 p^2}{y^2 + p^2} dy = \frac{l^2}{2}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{p}\right]_{+\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} l^2.$$

Si M est le milieu de AB et P le pôle de AB, la droite PM est parallèle à l'axe de la parabole, de plus le milieu de PM est sur cette courbe, donc l'aire comprise entre la parabole et le lieu du point P est $\frac{\pi}{2} l^2$.

On en déduit aussi l'équation du lieu du point P

$$2px = y^2 - \frac{l^2 p^2}{y^2 + y^2}.$$

Autres solutions par MM. Bouvaist et T. Ono.

QUESTIONS.

2207. On considère l'angle droit mobile $\widehat{H}$ formé par les parallèles à la tangente et à la normale en M à la courbe Γ, menées par le pied H de la perpendiculaire abaissée de M sur une droite fixe Δ. Si T est le point où la tangente en M à la courbe Γ coupe la droite Δ, μ le centre de courbure de Γ répondant au point M, démontrer que le centre instantané I de l'angle droit $\widehat{H}$ est à la rencontre de MH et du cercle circonscrit au triangle MμT. M. d'Ocagne.

2208. Si M est un point quelconque d'une conique dont A est un sommet, α étant le centre de courbure répondant à ce sommet, la tangente en M à la conique coupe la tangente en A sur la perpendiculaire menée de α à la corde AM.

M. d'Ocagne.

[I1]

EXTRACTION RAPIDE DE CERTAINES RACINES EXACTES D'INDICE QUELCONQUE;

Par M. P. DELENS.

Les Communications faites récemment à la Société d'Anthropologie par M. Quinton ont attiré l'attention sur les procédés d'extraction rapide des racines cubiques et cinquièmes de grands nombres; ces recherches généralisées pouvant, en dehors de leur intérêt théorique, rendre service dans la pratique journalière des calculs, il m'a semblé utile de rappeler diverses propriétés des puissances, établies en 1876 par G. Dostor (*Archiv der Mathematik und Physik*), et d'en indiquer en même temps d'autres qui conduisent à une méthode simple, et peut-être nouvelle, permettant de *trouver rapidement* (avec certaines restrictions, cependant) *une racine exacte, ayant un indice impair aussi élevé qu'on voudra, de deux ou même de trois chiffres, ainsi d'ailleurs, quoique un peu moins facilement, que des racines d'indice pair.*

A. — Racines d'ordre impair.

Recherche du chiffre des unités de la racine. — Si l'on considère le Tableau (reproduit ci-après) formé par les unités des puissances successives des dix, et même des onze premiers nombres (en ajoutant zéro), on voit tout d'abord que les puissances $5^{\text{ièmes}}$ sont terminées par le même chiffre que les nombres eux-mêmes, ce qui permet d'en déduire, comme consé-

quence immédiate, la propriété fondamentale suivante :

Les chiffres des unités des diverses puissances d'un nombre se reproduisent quand l'exposant de la puissance augmente de quatre unités.

Il suffira par suite de connaître les chiffres des unités des quatre premières puissances des nombres pour avoir ceux d'une puissance quelconque.

En second lieu, on remarque également que les chiffres des unités des puissances d'ordre impair sont toujours *tous* différents (des chiffres complémentaires donnant d'ailleurs lieu à des chiffres d'unités qui sont eux-mêmes complémentaires); tandis que ceux des puissances d'ordre pair se reproduisent symétriquement par rapport au terme du milieu 5.

On en conclut que, inversement, si l'on se donne une puissance parfaite d'ordre quelconque, il sera toujours possible de trouver, grâce aux remarques précédentes, le chiffre des unités de la racine, sans aucune ambiguïté, *si la puissance est impaire*, en se reportant aux colonnes relatives à la première ou la troisième puissance (qu'il suffit de connaître seule) dans le Tableau formé tout d'abord, suivant que l'exposant de la puissance est de la forme $4k+1$ ou $4k-1$; tandis que si l'exposant de la puissance est pair, il n'en sera pas de même, puisqu'on pourra toujours hésiter entre deux chiffres complémentaires, en tenant uniquement compte des propriétés que nous venons d'indiquer.

Exemples :

$$4^{13} = 67108864,$$

où

$$13 = 4k+1,$$

et

$$7^{11} = 1977326743,$$

où

$$n = 4k - 1.$$

Tableau des unités des puissances successives des premiers nombres.

N.......	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N^2.......	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
N^3..... .	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
N^4.......	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
N^5.......	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Recherche du chiffre des dizaines de la racine. — Ayant obtenu, comme nous venons de l'indiquer, le chiffre des unités d'une racine exacte d'indice impair quelconque, cherchons maintenant à obtenir le chiffre des dizaines de cette racine, que nous supposons n'avoir actuellement que deux chiffres. Lorsque l'exposant de la puissance parfaite donnée est simple, et a pour valeur 3 ou 5, par exemple, il est facile de calculer rapidement ce chiffre des dizaines en partageant le nombre donné en tranches de trois ou cinq chiffres à partir de la droite et en cherchant, dans le Tableau des cubes ou des 5ièmes puissances des dix premiers nombres, le plus grand nombre inférieur à la tranche de gauche du nombre donné; la racine de ce nombre sera le chiffre des dizaines demandé.

Mais ce procédé, qui peut servir pour les puissances d'exposant faible, est évidemment inapplicable pour une puissance d'ordre élevé quelconque, et il est alors indispensable d'avoir recours à une autre méthode.

Nous utiliserons dans ce cas la correspondance qui existe entre le reste de la division d'un nombre par un diviseur connu d, et celui des différentes puissances de ce même nombre par le même diviseur, corres-

pondance qui résulte des égalités

$$N^{\alpha} = (m.d + r)^{\alpha} = m.d + r^{\alpha} = m.d + r',$$

si $r^{\alpha} = m.d + r'$, r et r' étant les restes de division de N et N^{α} par d.

Le diviseur le plus simple à essayer est évidemment égal à 9; si nous nous reportons au Tableau formé ci-après pour les restes de la division par 9 des puissances successives des dix premiers nombres (zéro compris), nous constatons aussitôt :

1° Que les restes pour l'exposant 6 étant 1 ou 0, ceux des différentes puissances se reproduiront de 6 en 6 (en laissant de côté, pour la première puissance, les multiples de 3 qui donnent toujours ensuite 0 pour reste);

2° Que les restes des puissances d'exposant pair se reproduisent symétriquement par rapport au milieu de la colonne;

3° Que les restes des exposants multiples de 3 se reproduisent au moins trois fois.

Il en résulte donc que les seules puissances qui puissent donner sans ambiguïté par ce procédé une correspondance exacte entre les restes du nombre et de la puissance considérée, sont celles dont les exposants ne sont ni pairs, ni multiples de 3, c'est-à-dire finalement ici celles dont *l'exposant est de la forme* $6k \pm 1$, *sauf cependant lorsque la puissance donnée est multiple de* 9 *ou sa racine multiple de* 3.

On ne pourra donc employer cette recherche du reste de la division du nombre donné par 9 pour obtenir le chiffre des dizaines de la racine, que si l'indice de la racine est bien de cette forme, et en tenant compte de la restriction indiquée.

Tableau des restes de la division par 9 des puissances des dix premiers nombres.

	Restes de					
N.	N^1.	N^2.	N^3.	N^4.	N^5.	N^6.
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	7	5	1
3	3	0	0	0	0	0
4	4	7	1	4	7	1
5	5	7	8	4	2	1
6	6	0	0	0	0	0
7	7	4	1	7	4	1
8	8	1	8	1	8	1
9	0	0	0	0	0	0

Le deuxième diviseur que l'on doit essayer, à cause de la facilité que l'on a à former le reste de la division d'un nombre quelconque par ce diviseur, est évidemment 11.

Formons donc le Tableau des restes des douze premiers nombres (zéro compris) par ce nombre (Tableau ci-après); nous voyons aussitôt :

1° Que les restes de la 10ième puissance étant tous égaux à 1 (en dehors du premier et du dernier), les restes des autres puissances se reproduisent périodiquement de 10 en 10;

2° Que les restes de puissances d'exposant impair sont tous différents (en laissant de côté l'indice 5);

3° Que les restes des puissances d'exposant pair se reproduisent symétriquement à partir du milieu de la colonne, et que ceux dont l'exposant est multiple de 5 se reproduisent cinq fois au moins. Il en résulte donc qu'il sera toujours possible d'utiliser les restes de la division par 11 pour *les extractions de racines d'indice impair, sauf quand cet indice sera multiple*

de 5, et qu'il suffira d'avoir formé les restes des puissances 3ième, 7ième et 9ième des douze premiers nombres; quant aux puissances d'ordre pair ou multiple de 5, cette méthode donnera d'ordinaire plusieurs solutions. On voit également, d'après ces remarques, que ce procédé est préférable à celui qui consiste à déterminer le reste de la division par 9 du nombre donné.

Tableau des restes de la division par 11 *des puissances des douze premiers nombres.*

N.	Restes de N^1.	N^2.	N^3.	N^4.	N^5.	N^6.	N^7.	N^8.	N^9.	N^{10}.
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
3	3	9	5	4	1	3	9	5	4	1
4	4	5	9	3	1	4	5	9	3	1
5	5	3	4	9	1	5	3	4	9	1
6	6	3	7	9	10	5	8	4	2	1
7	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1
8	8	9	6	4	10	3	2	5	7	1
9	9	4	3	5	1	9	4	3	5	1
10	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Exemple. — Supposons que le nombre donné soit

170 581 728 179 578 208 256,

et qu'on sache que c'est une puissance 13ième parfaite. L'exposant 13 étant de la forme $4k+1$, le chiffre des unités de la racine est égal à celui du nombre donné; sa valeur est donc égale à 6. Pour avoir le chiffre des dizaines, formons le reste de la division par 11 de la puissance fournie; il est égal à

$$52 - 47 = 5.$$

Si l'on se reporte dans le Tableau des restes indiqué plus haut à la colonne des cubes, puisque

$$13 - 10 = 3,$$

on voit que le reste correspondant du nombre cherché est aussi égal à 3 ; par suite, la différence $6 - 3 = 3$ donne exactement le chiffre des dizaines de la racine demandée, qui est donc égale à 36.

Recherche du chiffre des centaines de la racine. — Nous supposerons maintenant que la racine exacte cherchée, étant toujours d'indice impair, contient trois chiffres ; pour trouver à la fois les chiffres des dizaines et des centaines de cette racine, celui des unités étant obtenu par le premier procédé, il suffira de déterminer successivement les restes de la division par 9 et par 11 de cette racine comme nous venons de l'indiquer, ce qui donnera deux équations distinctes, qui permettront d'obtenir la somme et la différence des chiffres cherchés et, par suite, ces chiffres eux-mêmes, en supposant toutefois que *la puissance donnée ait un exposant de la forme* $6k \pm 1$, *non divisible par* 5, *et qu'en outre elle ne soit pas divisible par* 9, afin que les conditions précédemment exposées soient toutes réalisées.

Nous allons montrer sur un exemple le procédé qui devra être suivi.

Exemple. — On donne le nombre

$$13723332506969728,$$

qui est une 7[ième] puissance exacte (forme $6k + 1$) d'un nombre de trois chiffres, et l'on demande de trouver sa racine 7[ième].

Chiffre des unités. — L'exposant 7 étant de la forme $4k - 1$, le chiffre des unités cherché est égal à

$$10 - 8 = 2.$$

Chiffres des dizaines et des cèntaines. — Les restes de la division du nombre donné par 11 et par 9 sont les mêmes que ceux de $46 - 30 = 16$, par 11, c'est-à-dire 5, et de $46 + 30 = 76$ par 9, soit 4; les restes de la racine cherchée par 11 et par 9 sont alors, d'après les Tableaux précédemment formés, 4 et 4; si donc on représente par x et y les chiffres des centaines et des dizaines de la racine, qui s'écrira par suite $xy2$, on aura les égalités

$$2 + x - y = m.11 + 4$$

et

$$2 + x + y = m.9 + 4;$$

ou

$$x - y = m.11 + 2,$$
$$x + y = m.9 + 2,$$

ce qui donne

$$2x = m.11 + m.9 + 4$$

et

$$2y = m.9 - m.11;$$

on a donc nécessairement

$$x = 2$$

et

$$y = 0,$$

les autres valeurs trouvées pour x et y étant inacceptables; la racine cherchée est, par suite, égale à 202.

Il est évidemment possible, dans certains cas, de trouver, par un procédé semblable, un plus grand nombre de chiffres à la racine (supposée toujours exacte), en employant de nouveaux diviseurs convenablement choisis; mais les calculs sont alors sensible-

ment plus longs, et ne présentent plus, par suite, le même intérêt; de sorte qu'il paraît inutile de les entreprendre ici, les exemples donnés précédemment suffisant bien pour montrer l'utilité de la méthode adoptée, qu'on pourra suivre encore pour déterminer les chiffres successifs de certaines racines d'indice impair.

B. — Racines d'indice pair.

Les recherches faites en utilisant les restes des puissances des différents nombres par certains diviseurs, permettent également de déterminer les racines d'indice pair, en levant le doute qui existe tout d'abord sur le chiffre des unités de ces racines.

Nous avons vu en effet que les chiffres des unités, dans le cas des puissances à exposant pair, se reproduisent symétriquement par rapport au milieu de la colonne, c'est-à-dire sont égaux pour deux chiffres complémentaires.

Mais, si l'on considère les Tableaux des restes de ces mêmes puissances par les diviseurs 9 et 11, ces restes se reproduisent aussi symétriquement par rapport au milieu de chaque colonne pour les puissances d'exposant pair (en laissant de côté pour le diviseur 9 les exposants multiples de 6 et, pour le diviseur 11, ceux qui sont multiples de 10); il en résulte donc que ces restes sont égaux pour des nombres dont la somme est égale à 9 dans le premier cas, et égale à 11 dans le deuxième ; il sera par suite possible d'utiliser les restes de ces divisions de la puissance donnée soit par 9, soit par 11 (le deuxième Tableau restant préférable au premier pour les raisons déjà exposées) pour déterminer exactement la racine, en supposant toutefois qu'elle n'ait qu'un seul chiffre. Et si l'on veut employer simul-

tanément les deux restes trouvés (ou même en former encore d'autres convenablement choisis), on pourra de la même façon déterminer, en passant rapidement en revue les différents cas qui peuvent se présenter, deux chiffres à la racine (ou davantage), en tenant toujours compte, bien entendu, des restrictions énoncées.

Nous allons donner, pour terminer, des exemples numériques relatifs à ces divers cas.

1° On donne le nombre

$$31\,381\,059\,609,$$

qui est une puissance 22ième parfaite; trouver sa racine.

Il est évident tout d'abord que cette racine n'a qu'un chiffre, puisque la puissance donnée a un nombre de chiffres inférieur à 23.

Le chiffre des unités du nombre considéré étant égal à 9, comme $22 = m.4 + 2$, le chiffre cherché de la racine ne peut être que 3 ou 7 (premier Tableau); d'autre part, le reste de la division par 11 du nombre donné étant ici égal à $27 - 18 = 9$, et l'exposant étant un multiple de 10 augmenté de 2, la racine ne peut être que 3 ou 8 (troisième Tableau); on en déduit donc que cette racine est égale à 3.

2° Supposons en second lieu que le nombre donné soit

$$6\,225\,969\,041\,1361,$$

qui est une puissance 8ième parfaite, et qu'on demande de calculer sa racine.

On voit aussitôt que la racine cherchée a deux chiffres, puisque le nombre des chiffres de la puissance donnée est compris entre 8 et 15.

L'exposant de la puissance étant un multiple de 4, et le chiffre de ses unités étant égal à 1, la racine peut

être terminée par l'un des quatre chiffres 1, 3, 7, 9 (premier Tableau); d'autre part, le reste de la division par 9 du nombre donné ayant pour valeur 1, et l'exposant étant de la forme $6k + 2$, le reste correspondant de la racine ne peut être que 1 ou 8 (deuxième Tableau); les seules solutions possibles sont donc

91, 73, 37, 19 (reste 1),

ou

71, 53, 17, 89 (reste 8).

Le reste de la division par 11 de la puissance donnée a pour valeur 3, et comme l'exposant est égal à 8, le reste correspondant de la racine ne peut être que 2 ou 9 (troisième Tableau).

On voit donc, en passant en revue les diverses solutions possibles indiquées plus haut, que la seule acceptable est ici 53; ce qui donne par suite la valeur demandée de la racine.

3° Si enfin l'exposant de la puissance donnée est faible, et égal à 2 ou à 4, par exemple, de telle sorte qu'on puisse calculer facilement par la méthode ordinaire le chiffre des plus hautes unités de la racine correspondante, on pourra trouver rapidement, grâce au procédé des restes, cette racine complète, en supposant qu'elle ait seulement trois chiffres.

Extrayons ainsi la racine carrée du nombre 204304, qui est le carré parfait d'un nombre de trois chiffres. Le chiffre des unités de la racine ne peut être que 2 ou 8 (premier Tableau); celui des centaines a pour valeur 4; il ne reste plus à déterminer que celui des dizaines, et en même temps à distinguer le chiffre exact des unités.

Formons pour cela les restes du nombre donné par 9 et par 11, qui sont 4 et 1; les restes correspondants de la racine sont alors 2 ou 7 dans le premier cas

(deuxième Tableau), et 1 ou 10 dans le deuxième (troisième Tableau). On voit donc, en se servant du diviseur 9, que la racine ne peut avoir que les valeurs 452 ou 488 (reste 2), ou bien 412 et 448 (reste 7), et en déterminant les restes par 11 de ces diverses solutions, on vérifie immédiatement que 452 est la seule exacte, les autres donnant des restes différant de 1 ou de 10.

[M¹8e]

SUR LA COURBE $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;

Par M. G. FONTENÉ.

---

1. Si une courbe plane, donnée de grandeur, se déplace dans son plan, les courbes qui sont les lieux de ses différents points ont même enveloppe que la courbe elle-même.

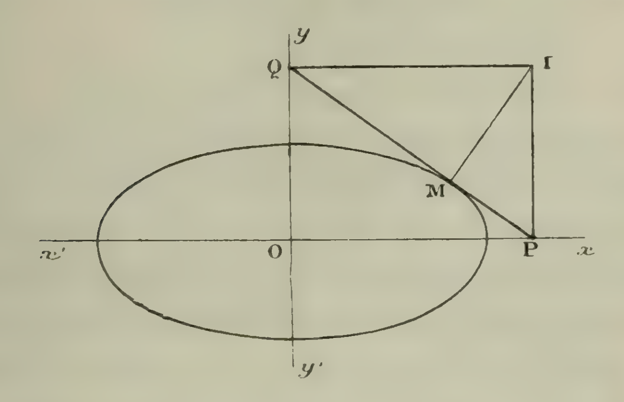
En effet, si M est un point de la courbe, il arrive, pour un certain nombre de positions de cette courbe, que M est le point de contact m de la courbe avec son enveloppe, et la ligne qui est le lieu du point M est tangente en m à l'enveloppe; on peut d'ailleurs introduire la considération du centre de rotation instantané de rotation I : la droite Im est normale en m à la courbe donnée, à son enveloppe et à la courbe qui est le lieu du point M.

En particulier, si une droite de longueur constante PQ se déplace dans un plan de manière que ses extrémités P et Q décrivent deux droites rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, les ellipses décrites par les différents points du segment PQ ont même enveloppe que la droite elle-

même, à savoir la courbe qui a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}};$$

ces ellipses sont celles qui ont leurs axes dirigés sui-



vant $x'x$, $y'y$, et pour lesquelles la somme des axes est constante et égale à $2l$. On a (*voir* la figure)

$$MP = b, \qquad MQ = a.$$

2. A propos de cette question, on peut chercher la relation qui existe entre les *longueurs* MP et MQ, PQ étant la tangente en un point M variable sur une ellipse donnée, P et Q étant sur les axes; cette relation est

$$(1) \qquad \frac{\overline{MP}^2 - b^2}{MP} + \frac{\overline{MQ}^2 - a^2}{MQ} = 0$$

ou

$$\frac{b^2}{MP} + \frac{a^2}{MQ} = PQ.$$

On peut avoir, comme dans la question précédente, $MP = b$, $MQ = a$; cela correspond à $\tang^2\varphi = \frac{b}{a}$, φ étant l'angle d'anomalie.

[O'8]

SUR LE MOUVEMENT A DEUX PARAMÈTRES DANS LE PLAN;

Par M. R. BRICARD.

1. La position d'un plan qui glisse sur un plan fixe dépend de trois paramètres. Si l'on établit entre eux une seule relation, on dit que le plan est animé d'un *mouvement au deuxième degré de liberté*, ou encore d'un *mouvement à deux paramètres*. Les points du plan mobile n'ont pas en général de trajectoire : chacun d'eux peut être amené à coïncider avec un point quelconque du plan fixe, ou tout au moins, si l'on tient compte des conditions de réalité du mouvement, avec un point quelconque situé à l'intérieur d'une certaine région. Un cas exceptionnel est celui où un point du plan mobile possède une trajectoire déterminée. Un tel point est nécessairement unique, car deux points du plan ne sauraient avoir de trajectoire sans que le degré de liberté du mouvement fût seulement le second.

Le mouvement au premier degré de liberté le plus général (en laissant de côté toutefois le cas où le mouvement se réduit à une translation) peut être obtenu, comme l'on sait, en liant le plan mobile à une courbe C qu'on fait rouler sur une courbe C_0. C est, dans le plan mobile, le lieu des points I qui deviennent successivement centres instantanés de rotation. C_0 est, dans le plan fixe, le lieu des points I_0 avec lesquels vient successivement coïncider le point I. On peut dire encore que tout mouvement à un paramètre permet d'établir entre deux courbes C et C_0, appartenant respective-

ment au plan mobile et au plan fixe, une correspondance ponctuelle, telle que deux arcs correspondants aient la même longueur.

On peut rechercher si le mouvement à deux paramètres donne lieu à une correspondance analogue (je parle de correspondance et non de roulement, car je n'ai pu voir par quelle extension de sens on parviendrait à définir un roulement à deux paramètres).

Pour établir le théorème, peut-être nouveau, auquel je suis parvenu, je m'appuierai sur une formule de rectification connue, mais qu'il ne sera pas inutile de démontrer ici même, pour donner au raisonnement toute la netteté désirable, surtout en ce qui concerne les signes.

2. Soient Ox, Oy deux axes de coordonnées rectangulaires et D une droite orientée ou *demi-droite*. Désignons par φ l'angle $(\widehat{Ox, D})$, défini à $2k\pi$ près, et par p la distance de l'origine à D. Cette distance, comptée sur la demi-droite qui fait avec D l'angle $+\frac{\pi}{2}$, est susceptible de signe.

Nous dirons que D a pour coordonnées (φ, p). La demi-droite opposée D' a pour coordonnées $(\varphi + \pi, -p)$. Toutes deux sont portées par la droite ayant pour équation

$$x \sin\varphi - y \cos\varphi = p. \tag{1}$$

Supposons maintenant que D varie en dépendant d'un paramètre. On peut prendre φ comme variable indépendante (en laissant de côté le cas sans intérêt où φ serait constant); p est une certaine fonction de φ. D enveloppe une courbe Γ. Le point de contact M de D avec Γ est donné par l'équation (1), jointe à la

suivante :

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = p',$$

où

$$p' = \frac{dp}{d\varphi}.$$

Ces équations, résolues en x et y, donnent

$$x = \quad p\sin\varphi + p'\cos\varphi,$$
$$y = -p\cos\varphi + p'\sin\varphi.$$

On en tire, en différentiant,

$$dx = (p + p'')\cos\varphi\, d\varphi,$$
$$dy = (p + p'')\sin\varphi\, d\varphi.$$

Par conséquent dx et dy sont les projections, sur Ox et sur Oy, d'un même segment $ds = (p + p'')\,d\varphi$, porté par la demi-droite D. ds est l'arc infiniment petit de la courbe Γ. Nous sommes conduits à le considérer comme positif ou comme négatif, suivant que, pour une variation infiniment petite de D, le point M se déplace ou non dans le sens de cette demi-droite.

Imaginons maintenant que p soit une fonction périodique de φ, la période étant égale à $2k\pi$ (k entier). La courbe Γ enveloppée par D est fermée ([1]), et sa longueur totale Λ est, en désignant par α un angle quelconque,

$$\Lambda = \int_{\alpha}^{\alpha+2k\pi} (p + p'')\,d\varphi = \int_{\alpha}^{\alpha+2k\pi} p\,d\varphi + [p'(\varphi)]_{\alpha}^{\alpha+2k\pi}.$$

Mais on a, en tenant compte de l'hypothèse,

$$p'(\alpha + 2k\pi) = p'(\alpha).$$

([1]) Pour éviter toute difficulté, je suppose que Γ n'a pas de point à l'infini.

La formule se réduit donc à

$$(2) \qquad \Lambda = \int_{\alpha}^{\alpha+2k\pi} p\, d\varphi.$$

Cette formule est attribuée à Cauchy par M. H. Lebesgue, dans son intéressant article intitulé : *Exposition d'un Mémoire de M. W. Crofton* (*Nouvelles Annales*, 4e série, t. XII, 1912, p. 481). Dans son *Cours de Géométrie infinitésimale*, M. G. Demartres donne à la formule (2), ou plutôt à celle que l'on obtient en prenant l'intégrale entre des limites quelconques, le nom de *formule de Legendre* (p. 147).

3. Considérons maintenant une courbe fermée C, de longueur totale L, sur laquelle on fixe un sens de circulation. En chaque point de C menons la tangente MT, dont l'orientation est déterminée par le sens de circulation fixé. Menons ensuite une demi-droite MU, faisant avec MT un angle V, variant suivant une loi continue quelconque, mais telle que pour chaque position du point M, MU ait une direction bien déterminée. Quand le point M fait le tour de la courbe C, la demi-droite MU enveloppe une courbe fermée Γ dont nous allons chercher la longueur Λ.

Soient x et y les coordonnées du point M. Écrivons, avec les notations ordinaires,

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi,$$

et posons aussi

$$\varphi + V = W.$$

La demi-droite MU est portée par la droite d'équa-

tion

$$\frac{X - x}{\cos W} = \frac{Y - y}{\sin W}.$$

Elle a pour coordonnées $(W,\ x \sin W - y \cos W)$.

Cela posé, quand M fait le tour de la courbe C, et la demi-droite MU étant supposée reprendre sa position initiale, W varie dans un intervalle $(\alpha, \alpha + 2k\pi)$, k étant un nombre entier. Faisons $\alpha = 0$ pour simplifier l'écriture. La formule (2) fournit l'expression suivante de Λ :

$$\Lambda = \int_0^{2k\pi} (x \sin W - y \cos W)\, dW,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\Lambda = -\,[x \cos W + y \sin W]_0^{2k\pi} + \int \cos W\, dx + \sin W\, dy.$$

La partie intégrée reprend la même valeur aux limites. L'intégrale qui forme la seconde partie du second membre doit être considérée comme une intégrale curviligne prise le long de la courbe C. Nous en referons une intégrale ordinaire en remplaçant dx et dy par leurs valeurs $ds \cos\varphi$ et $ds \sin\varphi$, et en prenant s comme variable d'intégration. Les limites sont 0 et L. Il vient donc

$$\Lambda = \int_0^L (\cos W \cos\varphi + \sin W \sin\varphi)\, ds = \int_0^L \cos(W - \varphi)\, ds$$
$$= \int_0^L \cos V\, ds.$$

On aboutit ainsi à ce résultat remarquable : *la longueur* Λ *ne dépend que de la longueur totale de la courbe* C *et de la manière dont varie l'angle* V *en fonction de l'arc* M_0M *compté à partir d'une ori-*

gine fixe M_0. Si l'on déforme la courbe C en lui conservant la même longueur totale, chaque demi-droite MU étant entraînée de manière à faire avec la tangente correspondante un angle constant, la longueur de la courbe Γ reste invariable.

4. Abordons maintenant l'étude du mouvement à deux paramètres.

Rapportons le plan fixe P à des axes O_0x_0, O_0y_0, le plan mobile P à des axes Ox, Oy. Soient ξ, η les coordonnées du point O par rapport aux axes fixes, φ l'angle $(\widehat{O_0x_0, Ox})$. Pour définir un mouvement à deux paramètres aussi général que possible, on peut prendre ξ et η comme variables indépendantes, φ étant une fonction de ξ et η (¹).

On a, entre les coordonnées absolues (x_0, y_0) et les coordonnées relatives (x, y) d'un point entraîné dans le mouvement, les relations

$$x_0 = \xi + x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$y_0 = \eta + x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

A partir de la position qui correspond à un système de valeurs ξ, η, le plan P peut prendre une infinité de mouvements infiniment petits, tous compris dans le mouvement à deux paramètres. Chacun d'eux est caractérisé par une valeur du rapport $\frac{d\eta}{d\xi}$, et il lui correspond un centre instantané de rotation I. On obtient les coordonnées relatives du point I en écrivant que ses coordonnées absolues ont des différentielles nulles,

(¹) Comme il existe au plus un point du plan P qui ait une trajectoire déterminée (nº 1), on peut toujours supposer que ce n'est pas le point O, ce qui permet de prendre ξ et η comme variables indépendantes.

ce qui donne

$$d\xi - (x \sin\varphi + y \cos\varphi)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}d\eta\right) = 0,$$

$$d\eta + (x \cos\varphi - y \sin\varphi)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}d\eta\right) = 0.$$

Si l'on fait varier le rapport $\frac{d\eta}{d\xi}$, on reconnaît immédiatement que le point I décrit une droite, dont il est inutile, pour ce qui suit, d'écrire l'équation ([1]).

Ainsi :

Dans un mouvement à deux paramètres, le plan mobile peut prendre, à partir de l'une quelconque de ses positions, une infinité de mouvements infiniment petits. Le lieu des centres instantanés de rotation correspondants est une droite, que l'on peut appeler droite des centres ([2]).

5. Considérons maintenant les ∞^2 positions du plan P. Pour chacune d'elles il existe une droite des centres. L'ensemble des droites du plan P, dont chacune est appelée à devenir droite des centres, se confond en général avec l'ensemble des droites de ce plan (sauf un cas d'exception dont il sera parlé plus loin). De même, toutes les droites du plan P_0 sont en général appelées à devenir droites des centres, chacune pour une position particulière du plan P. On peut donc établir une

---

([1]) On obtient une forme plus simple en introduisant les *coordonnées isotropes,* ce qui revient à employer la Géométrie vectorielle.

([2]) Ce résultat est connu. Il correspond par exemple à la notion de *couronoïde tangent à un mouvement à deux paramètres,* introduite par M. R. de Saussure dans ses études de Géométrie cinématique [*voir* par exemple : *Exposé résumé de la Géométrie des feuillets*, Genève, 1910; ou bien : *Geometrio folietara* (en esperanto), Genève, 1910].

correspondance entre les droites du plan P_0 et celles du plan P, deux droites correspondantes D_0 et D étant, dans le plan P_0, celle qui sera droite des centres pour une certaine position du plan P, et dans ce dernier plan, celle qui viendra alors coïncider avec la droite D_0.

Nous allons reconnaître que cette correspondance jouit d'une propriété métrique remarquable.

Observons en effet que le mouvement à deux paramètres renferme une infinité de mouvements à un paramètre. On obtient l'un quelconque d'entre eux en assujettissant le point O à décrire une courbe arbitrairement donnée. Considérons un tel mouvement *fermé*, c'est-à-dire tel qu'il ramène le plan P à sa position initiale.

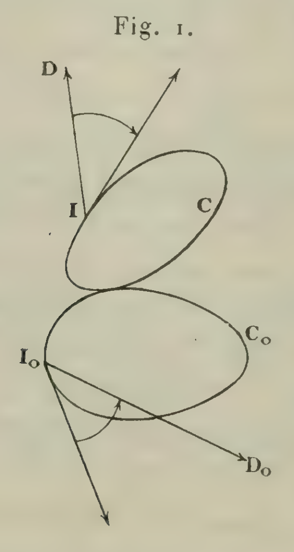
Dans ce mouvement, les droites D du plan P, qui seront successivement droites des centres enveloppent une courbe fermée Γ. Nous pouvons orienter ces droites, l'orientation de la droite qui correspond à la position initiale du plan P étant choisie arbitrairement, et celle des autres en résultant par continuité. Chaque droite D viendra successivement coïncider avec une certaine droite D_0 du plan P_0, que l'on peut orienter en conséquence de cette application. Les droites D_0 enveloppent une courbe fermée Γ_0. Je dis que *les deux courbes* Γ *et* Γ_0 *ont même longueur totale.*

En effet le mouvement considéré s'obtient en faisant rouler une certaine courbe fermée C sur une autre courbe fermée C_0. Ces deux courbes ont même longueur totale, puisque le mouvement est fermé.

Soient I_0 un point quelconque de la courbe C_0 et I le point correspondant de C (*fig.* 1), c'est-à-dire le point du plan P qui viendra se confondre avec I_0 quand ce dernier point sera centre instantané de rotation.

A ce moment les deux courbes C et C_0 seront tangentes. I et I_0 appartiennent respectivement à deux droites D et D_0 qui seront en coïncidence au moment

Fig. 1.



considéré. Il faut donc que les droites orientées D et D_0 fassent le même angle respectivement avec la tangente en I à C et la tangente en I_0 à C_0 (ces deux tangentes ayant elles-mêmes des orientations qui résultent des conditions du mouvement). On voit que le théorème du n° 3 est immédiatement applicable, et les courbes Γ et Γ_0 ont même longueur totale.

En résumé, *un mouvement à deux paramètres permet d'établir entre deux plans* P *et* P_0 *une correspondance de droite à droite. Aux droites qui, dans le plan* P, *enveloppent une courbe fermée* Γ, *correspondent, dans le plan* P_0, *des droites enveloppant une courbe fermée* Γ_0, *et les deux courbes* Γ *et* Γ_0 *ont même longueur totale* [1].

---

[1] Cette forme d'énoncé est un peu trop générale. On peut en effet considérer des mouvements à deux paramètres tels qu'une droite D étant donnée dans le plan P, il existe plusieurs positions

Il est assez remarquable que l'égalité de longueur établie n'existe qu'entre courbes fermées. Deux *arcs* correspondants des courbes Γ et Γ_0 ont en général des longueurs différentes.

Par exemple à des droites D passant par un point fixe correspondent des droites D_0 qui enveloppent une courbe de longueur totale nulle. Il faut entendre par là une courbe comprise d'arcs tels que la somme algébrique de leurs longueurs soit nulle. Ces arcs sont séparés par des points de rebroussement. Une telle courbe est la développée d'une courbe fermée.

6. Revenons sur un cas d'exception signalé plus haut. C'est celui où les droites du plan P, appelées à devenir droites des centres, forment un système simplement infini. Le théorème général cesse alors d'avoir un sens. Cherchons à définir les mouvements à deux paramètres pour lesquels se présente cette particularité.

Les droites du plan P, appelées à devenir droites des centres, ont alors des trajectoires orthogonales. Soit G l'une d'entre elles. Soient encore, pour une certaine position du plan P, D la droite des centres, M le point où elle rencontre la courbe G dans sa position actuelle (*fig.* 2). Le point M est ainsi défini pour

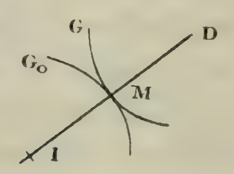
---

de ce plan pour chacune desquelles la droite D deviendra droite des centres. Supposons alors que la droite D, enveloppant une courbe fermée donnée arbitrairement dans le plan P, parte d'une certaine position et y revienne. Il peut fort bien arriver que le plan P, occupant à chaque instant la position pour laquelle la droite D est droite des centres, ne revienne pas à sa position initiale. Les droites D_0, correspondant aux droites D, n'envelopperaient pas une courbe fermée.

Pour tout mouvement à deux paramètres donné, il faudra préciser, par une discussion spéciale, la nature des courbes fermées auxquelles le théorème du texte est applicable.

chaque position du plan P, mais il est mobile par rapport à ce plan, où sa trajectoire est la courbe G. Donnons au plan P, à partir de sa position actuelle,

Fig. 2.



un mouvement infiniment petit quelconque compris dans le mouvement à deux paramètres, et cherchons la vitesse absolue du point M.

Pour le mouvement infiniment petit considéré, le centre instantané de rotation est un point I de D. D'après la règle de composition des vitesses, la vitesse absolue de M est la somme géométrique de sa vitesse d'entraînement, résultant d'une rotation autour du point I, et de sa vitesse relative dans le plan P. Or, ces deux vitesses sont toutes les deux portées par la tangente en M à G. Le point M a donc, quel que soit le mouvement infiniment petit considéré, une vitesse absolue bien déterminée en direction.

Il en résulte que le point M, construit pour toutes les positions du plan P a, dans le plan P_0, une trajectoire bien déterminée G_0. En effet, la condition trouvée se traduit par une équation différentielle du premier ordre entre les coordonnées de ce point, et dont l'intégrale est complètement déterminée par une position particulière. On voit aussi que G_0 est tangente à G. On parvient donc, en résumé, au résultat suivant :

Pour définir, dans des conditions aussi générales que possible, un mouvement à deux paramètres singulier, tel que l'ensemble des droites du plan mo-

bile appelées à devenir droites des centres soit simplement infini, on liera la figure mobile à une courbe G *assujettie à toucher constamment une courbe fixe* G_0. *Les deux courbes* G *et* G_0 *peuvent d'ailleurs être quelconques.*

On remarquera que, dans le plan fixe, les droites appelées à devenir droites des centres forment aussi un système simplement infini, constitué par l'ensemble des normales à G_0.

7. Le théorème du n° 5 s'étend au mouvement à deux paramètres d'une sphère qui glisse sur une sphère fixe.

Tout d'abord, on reconnaît sans peine que, pour une position de la sphère mobile, il existe une infinité de centres instantanés de rotation, correspondant aux divers mouvements infiniment petits que peut prendre la sphère mobile à partir de sa position actuelle, et que ces centres sont répartis sur deux *grands cercles des centres* (diamétralement opposés). En général, tous les grands cercles de la sphère mobile sont appelés à devenir grands cercles des centres, et de même tous les grands cercles de la sphère fixe. Un mouvement à deux paramètres sur la sphère permet donc d'établir une correspondance de grand cercle à grand cercle. A une courbe fermée, considérée comme enveloppe de grands cercles, correspond une autre courbe fermée, enveloppe des grands cercles correspondants. Je dis que *ces deux courbes fermées ont en général même longueur.*

Comme la démonstration donnée au n° 5 s'appuie uniquement sur le théorème du n° 3, il suffit d'établir que ce dernier s'étend à la sphère.

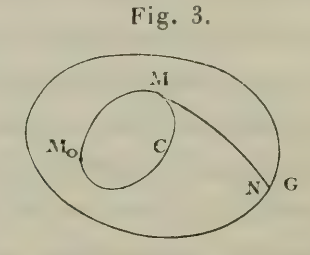
Une marche analogue à celle que nous avons suivie

dans le plan conduirait, sur la sphère, à beaucoup de calculs. Au contraire, en faisant appel à la considération des figures supplémentaires et en appliquant un théorème fondamental de Gauss, on parvient à une démonstration très simple.

Rappelons tout d'abord qu'on appelle *angle de contingence géodésique* en un point d'une courbe sphérique l'angle infiniment petit du grand cercle tangent à la courbe au point considéré et du grand cercle tangent au point infiniment voisin. Appelons *angle de contingence total* d'un arc de longueur finie la valeur de l'intégrale curviligne, prise le long de cet arc, et dont l'élément différentiel est l'angle de contingence géodésique (1).

Cela posé, soit C une courbe fermée (*fig.* 3) sur

Fig. 3.



laquelle on prend un point M_0 comme origine. En chaque point M de la courbe menons le grand cercle tangent et portons-y un arc MN dont la longueur soit une fonction donnée $f(\theta)$ de l'angle de contingence total θ de l'arc M_0M. Le point N décrit une courbe fermée, pour un choix convenable de la fonction f. Je dis que l'angle de contingence total de cette courbe G ne dépend que de la fonction f et de

(1) Il va sans dire que l'angle de contingence total d'un arc est distinct de l'angle des arcs de grand cercle tangents à ses extrémités.

l'angle de contingence total Θ de la courbe C, et nullement de la forme de cette dernière.

On sait en effet, par le théorème fondamental de Gauss sur la courbure totale, que l'angle de contingence total d'une courbe fermée tracée sur la sphère ne dépend que de la mesure de l'aire sphérique limitée par cette courbe. Il faut donc établir que la courbe G limite une aire constante, si Θ est donné. Mais, si la courbe fermée C varie en conservant un angle de contingence total constant, son aire reste aussi constante. Tout revient donc à démontrer que la différence entre les aires des courbes G et C est constante. Or, l'élément différentiel de cette aire est celle d'un triangle sphérique isoscèle dont l'angle au sommet est égal à $d\theta$, et dont les côtés égaux ont une longueur commune égale à $MN = f(\theta)$. Cette aire infinitésimale a pour expression, en supposant le rayon de la sphère égal à l'unité,

$$[1 - \cos f(\theta)]\, d\theta.$$

On a donc, pour valeur de l'aire comprise entre C et G,

$$\int_0^{\Theta} [1 - \cos f(\theta)]\, d\theta,$$

ce qui établit la proposition, puisque l'expression trouvée ne dépend que de Θ et de la forme de la fonction f.

Cela posé, quel sera le théorème corrélatif? Aux points de la figure considérée vont correspondre, dans la figure supplémentaire, des grands cercles, et réciproquement. A une longueur d'arc de grand cercle correspond une grandeur d'angle, à un angle de contingence une longueur d'arc infiniment petit, à un angle de contingence total une longueur d'arc fini. La proposition établie se transforme donc en la suivante :

Soit C *une courbe sphérique de longueur totale* L. *Par chaque point* M *de* C *menons un arc de grand cercle faisant avec la tangente en* M_0 *un angle égal à une fonction donnée de la longueur de l'arc de courbe* M_0M, *mesuré à partir d'un point* M. *Cet arc de grand cercle enveloppe une courbe* G *qui est fermée, pour un choix convenable de la fonction considérée. La longueur totale de la courbe* G *ne dépend que de la forme de cette fonction et de la longueur* L.

C'est bien le théorème du n° 3 étendu à la sphère.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1912. SOLUTION DE LA QUESTION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL;

PAR M. C. CLAPIER.

---

1. Une tangente MT au point M du cercle (γ) est déterminée par son plan de projection dont l'équation normale s'écrit

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - r = 0,$$

et par le plan du cercle lui-même. Si l'on se donne une fonction uniforme $\omega(\alpha)$, les plans dépendant d'un paramètre α,

$$(1)\qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha - r + \omega(z-h) = 0,$$

enveloppent une surface développable (S).

Cette surface dépend de la fonction arbitraire $\omega(\alpha)$ et les équations de ses caractéristiques sont

$$(2)\qquad M\mu\left\{\begin{aligned} x\cos\alpha + \varphi\sin\alpha + \omega z &= r + \omega h,\\ -x\sin\alpha + \varphi\cos\alpha + \omega'_\alpha z &= \omega'_\alpha h.\end{aligned}\right.$$

Si l'on résout ces équations par rapport à x et y, on obtient les coordonnées d'un point de (S) à l'aide des deux variables α et z. La courbe (C) section de cette surface par le plan xOy sera définie par

$$(3) \qquad \mu \left\{ \begin{array}{ll} x = \rho \cos\alpha - \rho' \sin\alpha, & \rho = r + \omega h, \\ y = \rho \sin\alpha + \rho' \cos\alpha, & \rho' = \omega'_\alpha h. \end{array} \right.$$

Au point $\mu(x, y)$ correspond sur la tangente μt à cette courbe le point P de sa podaire, et l'on a

$$\mathrm{OP} = \rho, \qquad \widehat{x\mathrm{OP}} = \alpha, \qquad \mathrm{P}\mu = \rho'.$$

2. Une courbe (C_1) définie par son équation en coordonnées cartésiennes aura une podaire dont l'équation coordonnées polaires ρ et α pourra s'écrire

$$\mathrm{F}(\cos\alpha, \sin\alpha, \rho) = 0;$$

d'où l'on déduira un nombre limité de valeurs des fonctions $\rho_1(\alpha)$; à chacune d'elles correspondra une représentation par les formules (3). Si l'on se donnait (C_1) sous la forme $y = f(x)$, pour qu'elle pût coïncider avec une courbe (C), il faudrait que ρ satisfasse à l'équation différentielle

$$y'_x = -\cot\alpha = f'_x(\rho \cos\alpha - \rho' \sin\alpha),$$

dont l'intégration introduira une constante arbitraire qui provient de ce que toutes les courbes $y = f(x) + C$ sont des intégrales.

Si l'on fait subir une translation à la courbe (C_1), on aura

$$\rho = r + \omega h + k.$$

En ajoutant une constante arbitraire k à la fonction $\rho_1(\alpha)$ qui définit la représentation et caractérise une surface (S_1), on aura toutes les autres surfaces (S)

auxquelles correspondent les autres solutions de l'équation différentielle déterminant ρ ou ω.

La représentation n'est possible que si à tous points de (C_1) correspond une seule tangente et une seule valeur de ρ; il faut donc que la courbe algébrique donnée n'ait aucun point multiple à tangentes distinctes.

Exemples : On pourra représenter l'hypocycloïde à trois rebroussements par les formules (3) en prenant $\rho = R\cos 3\alpha$, et l'hypocycloïde à quatre rebroussements, développée de l'ellipse à l'aide de $\rho = l \sin\alpha\cos\alpha$.

3. Pour appliquer la représentation précédente à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire, nous exprimerons les coordonnées x et y et les dérivées $y'_x, y''_x, y'''_x, \ldots$ à l'aide de ρ, α et les dérivées successives $\rho'_\alpha, \rho''_\alpha, \rho'''_\alpha, \ldots$.

Nous avons

$$y' = \frac{dy}{d\alpha} : \frac{dx}{d\alpha}, \qquad y'' = \frac{dy'}{d\alpha} : \frac{dx'}{d\alpha}, \qquad \ldots$$

et nous déduisons, par les formules de transformation (3),

$$(4) \qquad y' = -\cot\alpha, \qquad y'' = \frac{-1}{\sin^3\alpha(\rho + \rho'')},$$

$$(5) \qquad y''' = -\frac{3R\cos\alpha + \rho' + \rho'''}{R^3\sin^4\alpha}, \qquad R = \rho + \rho'';$$

R est le rayon de courbure au point μ de (C).

La nouvelle équation différentielle pourra être plus facilement intégrable, et nous donnera

$$\rho = \varphi(\alpha, c_1, c_2, \ldots);$$

portant dans les expressions (3) nous aurons l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée à

l'aide du paramètre α et des constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots$. La courbe intégrale ne devant pas avoir de points singuliers, il y aura des équations différentielles exceptionnelles qui à l'aspect de leurs coefficients ne pourront être intégrées par cette méthode.

Appliquons à l'équation du deuxième ordre

$$y''(xy'-y) = (1+y'^2)^2;$$

nous trouvons, à l'aide de (3), (4) et (5),

$$(6) \qquad \rho'' + 2\rho = 0 \qquad \text{ou} \qquad \rho + R = 0,$$
$$\varphi(\alpha) = A\cos\sqrt{2}\,\alpha + B\sin\sqrt{2}\,\alpha.$$

La courbe intégrale (C) est rectifiable; on a en effet

$$ds = -R\,d\alpha = \varphi(\alpha)\,d\alpha,$$
$$S = \frac{A}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\,\alpha - \frac{B}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}\,\alpha,$$

ou, avec de nouvelles constantes m et θ,

$$(7) \qquad S = m\sin\sqrt{2}(\alpha - \theta).$$

Soit (C_1) une courbe particulière correspondant à $(\theta = 0, m = 1)$; il suffira de la faire autour de l'origine d'un angle quelconque θ et de prendre les homothétiques relatives à ce pôle O pour avoir toutes les autres intégrales.

D'après les relations (3) et (4), une équation en (x, y, y') qui contient linéairement x et y prendra la forme $\rho' = a(\alpha)\rho + b(\alpha)$ et son intégration se ramène aux quadratures.

Une équation du second ordre de la forme

$$m\frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}} + n = R,$$

rayon de courbure, prendra la forme

$$\rho'' + (m+1)\rho = n$$

et sera intégrable par quadratures. Si $n = 0$, on aura une équation de la forme (6) et son intégrale générale pourra être obtenue par le déplacement (rotation et homothétie) d'une intégrale particulière.

4. Une surface (S) est une développable circonscrite au cercle fixe (γ) et à une courbe quelconque (C) du plan xOy. Prenons une famille de courbes (C) dépendant d'un paramètre c, et ayant pour équation, sous forme tangentielle,

$$\rho = r + \omega(\alpha, c)h. \tag{8}$$

A chacune d'elles correspond une surface (S), dont les équations (2) de la caractéristique s'écrivent

$$\frac{x - r\cos\alpha}{\omega\cos\alpha - \omega'\sin\alpha} = \frac{y - r\sin\alpha}{\omega\sin\alpha + \omega'\cos\alpha} = h - z = \frac{\mathrm{MN}}{\sqrt{1+\omega^2+\omega'^2}}. \tag{9}$$

Une courbe (σ) sera déterminée par une relation entre z et α, $z = h - f(\alpha, c)$; lorsque α et c varient, elle engendre une surface (Σ) représentée par les expressions

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha + f(\alpha, c)\,[\omega(\alpha, c)\cos\alpha - \omega'_\alpha\sin\alpha], \\ y = r\sin\alpha + f(\alpha, c)\,[\omega(\alpha, c)\sin\alpha + \omega'_\alpha\cos\alpha], \\ z = h - f(\alpha, c), \end{cases} \tag{10}$$

qui donnent les coordonnées de l'un de ses points à l'aide des paramètres (α, c).

Si dans l'équation cartésienne d'une surface donnée (Σ_1), on remplace x, y et z par les valeurs (10), on

obtiendra une équation qui déterminera f; cela revient à prendre pour (σ) la courbe d'intersection des droites caractéristiques (9) avec la surface (Σ_1).

Pour que la détermination de f soit unique, il faudra que ces droites $M\mu$ rencontrent (Σ_1) en un seul point N autre que le point M; la surface donnée devra donc passer par le cercle (γ). Dans le cas où $\omega^2+\omega'^2=1$, la distance $MN=f\sqrt{2}$.

5. Si l'on excepte les surfaces réglées admettant le plan xOy comme plan directeur, les équations (10) peuvent représenter une surface quelconque.

Supposons que cette surface (Σ_1) soit orthogonale à la famille de surfaces (S) dépendant du paramètre $c=\beta$ et écrivons les équations (10) sous la forme

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} x\cos\alpha+y\sin\alpha &= r-\omega(\alpha,\beta)\,\zeta(\alpha,\beta),\\ -x\sin\alpha+y\cos\alpha &= \quad -\omega'(\alpha,\beta)\,\zeta(\alpha,\beta),\\ z &= h+\zeta(\alpha,\beta). \end{aligned}\right.$$

Les courbes (σ) sont définies par $\beta=$ const. et le plan tangent à la surface (S) correspondante a pour coefficients directeurs

$$\cos\alpha,\quad \sin\alpha,\quad \omega(\alpha,\beta).$$

Pour qu'il y ait orthogonalité, il faudra que la fonction inconnue $\zeta(\alpha,\beta)$ soit choisie de manière à satisfaire à la condition

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & \omega\\ \dfrac{\partial x}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial y}{\partial\alpha} & p\\ \dfrac{\partial x}{\partial\beta} & \dfrac{\partial y}{\partial\beta} & q \end{vmatrix}=0.$$

$$p=\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha},\qquad q=\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}.$$

Les expressions (11) donnent x, y et z à l'aide des variables indépendantes α et β. Dérivons les deux premières successivement par rapport à ces variables; nous obtenons

$$(13) \quad \begin{cases} \sin\alpha \dfrac{\partial x}{\partial \beta} - \cos\alpha \dfrac{\partial y}{\partial \beta} = \omega'_\alpha q + \omega_2 \zeta, \qquad \omega_2 = \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta}, \\ \cos\alpha \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} - \sin\alpha \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = r - \omega' p - \zeta(\omega + \omega''), \end{cases}$$

$$(13') \quad \begin{cases} \cos\alpha \dfrac{\partial x}{\partial \beta} + \sin\alpha \dfrac{\partial y}{\partial \beta} = -\,\omega q - \omega_1 \zeta, \qquad \omega_1 = \dfrac{\partial \omega}{\partial \beta}, \\ -\sin\alpha \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} - \cos\alpha \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = -\,\omega p. \end{cases}$$

On déduit facilement la valeur du mineur

$$(14) \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ = \omega p(\omega' q + \omega_2 \zeta) + (\omega q + \omega_1 \zeta)[r - \omega' p - \zeta(\omega + \omega'')].$$

A l'aide des égalités (13) et (14) nous pouvons développer la condition (12) et obtenir l'équation aux dérivées partielles qui déterminera ζ

$$(E) \quad p\zeta[\omega_2(1+\omega^2) - \omega_1 \omega \omega'] + q(1+\omega^2)[r - \zeta(\omega + \omega'')] \\ + \omega \omega_1 \zeta [r - \zeta(\omega + \omega'')] = 0;$$

elle est linéaire par rapport aux dérivées de z fonction des paramètres (α, β).

L'arête de rebroussement d'une surface (S) s'obtient en ajoutant aux équations (2) la suivante

$$-\,x\cos\alpha - y\sin\alpha + \omega''_\alpha z = \omega''_\alpha h,$$

ou encore

$$(z - h)(\omega + \omega'') = r.$$

Il en résulte que si l'on choisit la fonction arbitraire

$$\zeta = \frac{r}{\omega + \omega''},$$

les équations (11) représenteront la surface lieu des arêtes de rebroussement des développables (S).

Cette surface (Σ_2) sera une solution singulière de l'équation (E), si l'on a $\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} = 0$, et par suite, si les surfaces (S) sont choisies de manière qu'on ait

$$\omega + \frac{d^2\omega}{d\alpha} = r\varphi(\beta),$$

$$(15) \qquad \omega = A\cos\alpha + B\sin\alpha + r\varphi(\beta).$$

Nous pouvons prendre $\varphi(\beta) = \beta$ et dans ce cas l'équation (E) se réduit à

$$p\zeta\omega\omega' - (1-\beta)(1+\omega^2)q = \omega r\zeta,$$

et elle est facilement intégrable.

Une surface normale aux génératrices (2) est telle que la condition (12) et la suivante

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha & \omega' \\ \frac{\partial x}{\partial\alpha} & \frac{\partial y}{\partial\alpha} & p \\ \frac{\partial x}{\partial\beta} & \frac{\partial y}{\partial\beta} & q \end{vmatrix} = 0$$

soient satisfaites.

D'après les expressions (13) et (13'), on devra avoir, par l'élimination du mineur (14),

$$p\zeta(\omega'\omega_2 + \omega\omega_1) + q\omega'[r - \zeta(\omega + \omega'')] = 0.$$

La surface (Σ_2) sera une solution particulière et obtiendra toutes les autres en prenant pour (σ) une développante de l'arête de rebroussement.

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soit $x = f(u)$ la fonction résultant de l'inversion de l'intégrale*

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^3}} = u,$$

avec les conditions

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1.$$

Trouver, par l'application du théorème d'Abel, l'expression de $f(u + v)$ en fonction rationnelle de $f(u)$, $f(v)$, $f'(u)$ et $f'(v)$.

II. 1° *En supposant comme l'expression d'une fonction d'une variable au moyen de l'intégrale double de Fourier, montrer comment on peut résoudre l'équation fonctionnelle en $\varphi(y)$*

$$f(x) = \int_0^\infty \varphi(y) \cos(xy)\, dy,$$

$f(x)$ étant une fonction donnée.

2° *Appliquer la solution trouvée au cas de*

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Résoudre l'équation fonctionnelle*

$$f(x) + \lambda \int_0^{2\pi} \cos(x - y) f(y)\, dy = \sin^2 x,$$

où λ est une constante.

Pour quelles valeurs de la constante λ *l'équation*

$$f(x) + \lambda \int_0^{2\pi} \cos(x - y)\, f(y)\, dy = 0$$

a-t-elle une solution autre que zéro?

(Juillet 1911.)

Épreuve théorique. — I. 1° *On considère l'intégrale*

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} \varphi(y)\, dy,$$

$\varphi(y)$ *étant une fonction réelle de la variable réelle* y. *Montrer que si cette intégrale a un sens pour une valeur* x_0, *réelle ou complexe de* x, *elle aura un sens pour toute valeur de* x *dont la partie réelle est supérieure à la partie réelle de* x_0.

2° *Quelle est la formule permettant de résoudre l'équation fonctionnelle* [*où* $\varphi(y)$ *est la fonction inconnue*]

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy} \varphi(y)\, dy,$$

quand cette équation est susceptible d'une solution?

3° *Appliquer la formule précédente à la résolution de l'équation fonctionnelle*

$$\frac{1}{x - \alpha} = \int_0^{\infty} e^{-xy} \varphi(y)\, dy,$$

α *étant une constante réelle, et la variable* x *restant supérieure à* α.

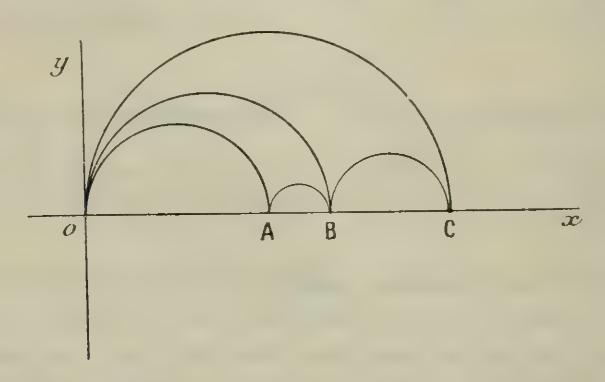
II. *On considère l'équation fonctionnelle*

$$(x - \alpha) f(x) + \lambda \int_a^b \mathrm{X}(x)\, \mathrm{Y}(y)\, f(y)\, dy = \psi(x),$$

α *étant compris entre* a *et* b *et* f *étant la fonction inconnue;* $\mathrm{X}(x)$ *et* $\mathrm{Y}(y)$ *sont respectivement des fonctions données de* x *et* y, *ainsi que* $\psi(x)$, *et sont régulières entre* a *et* b.

On demande de trouver pour quelle valeur de λ *cette équation aura une solution* $f(x)$ *continue entre* a *et* b.

Épreuve pratique. — *Soient dans le plan d'une variable complexe* $x + iy = z$; *tracer les trois demi-cercles de diamètres* OA, OB, OC *situés sur l'axe des quantités réelles.*



On prend l'image de la demi-circonférence $\widehat{OA}$ *par rapport au cercle* $\widehat{OB}$, *ce qui donne la demi-circonférence* $\widehat{OC}$. *Pareillement, on prend l'image de la demi-circonférence* $\widehat{AB}$ *par rapport au même cercle* $\widehat{OB}$, *ce qui donne la demi-circonférence* $\widehat{BC}$.

On demande de calculer les deux substitutions fondamentales du groupe fuchsien ainsi engendré et ayant pour polygone fondamental le quadrilatère curviligne OABCD.

On posera

$$OA = a, \qquad OB = b \qquad (a < b).$$

(Octobre 1911.)

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Marseille.

Épreuve théorique. — *Trouver le mouvement d'un corps solide de révoluiton pesant et homogène dont un point* O

de l'axe est fixe et dont l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point est la sphère

$$A(x^2+y^2+z^2)=1.$$

A l'origine des temps, l'axe de révolution est horizontal; la rotation instantanée est égale à $\alpha\sqrt{2}$ *en désignant par* α *la quantité* $\frac{2Mga}{A}$, *où* M *désigne la masse du corps, g l'accélération de la pesanteur et a la distance du point fixe au centre de gravité; enfin l'axe de cette rotation instantanée est orienté suivant la bissectrice de l'angle que font la verticale du point fixe dirigée vers le haut et l'axe de révolution dirigé du point fixe vers le centre de gravité du corps.*

Nota. — *Avec les notations ordinaires, les données initiales se traduisent par*

$$\theta_0=\frac{\pi}{2},\qquad \theta'_0=0,\qquad \varphi'_0=\psi'_0=\alpha.$$

SOLUTION.

Les axes fixes sont la verticale OZ et deux axes OX, OY. Les axes mobiles sont l'axe de révolution Oz à une époque t et deux axes Ox et Oy liés au corps. La figure dépend des angles ψ (OX et OA intersection des deux plans des xy), φ (OA et Ox) et θ (OZ et Oz).

La somme des moments des forces est nulle par rapport à OZ et à Oz, donc la somme des moments des quantités de mouvement est constante. On a

$$A(p\sin\varphi\sin\theta+q\cos\varphi\sin\theta+z\cos\theta)=\text{const.},$$
$$Az=\text{const.}$$

D'ailleurs on a

$$\psi'+\varphi'\cos\theta=\alpha,$$
$$\varphi'+\psi'\cos\theta=\alpha,$$

d'où

$$\varphi'=\psi'=\frac{\alpha}{1+\cos\theta}.$$

Le théorème des forces vives donne

$$A(p^2+q^2+r^2)=-2Mga\cos\theta+\text{const.}$$

ou

$$\psi'^2 + \varphi'^2 + \theta'^2 + 2\varphi'\psi' \cos\theta = -2Mga\cos\theta + \text{const.},$$

et comme

$$\varphi' = \psi' \qquad \text{et} \qquad 2\psi'^2(1 + \cos\theta) + \theta'^2 = \alpha^2(2 - \cos\theta),$$

on arrive à

$$\theta'^2 = \frac{\cos\theta(1 - \cos\theta)}{1 + \cos\theta}.$$

Or pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, θ est négatif. Donc puisque $\theta'_0 = 0$, θ' est ensuite négatif et θ va en décroissant indéfiniment. On peut intégrer et l'on a

$$\sqrt{\cos\theta} = \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1},$$

$$2\varphi = 2\psi = \alpha t + 2 \text{ arc tang} t.$$

Épreuve pratique. — *On donne dans un plan horizontal quatre points fixes placés aux sommets d'un carré de* 2^{m} *de côté.*

A ces points fixes on attache des fils de fer qui sont réunis par leurs extrémités en un point auquel on suspend un poids P *de* 1000^{kg}.

Les fils ont la même longueur, 3^{m}, *mais leurs sections sont inégales et sont successivement entre elles comme les nombres* 1, 2, 3, 4.

Les fils s'allongent proportionnellement à leur tension et en raison inverse de leur section.

Le fil le plus faible s'allonge du millième de sa longueur sous une tension de 100^{kg}.

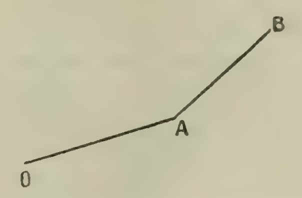
Calculer les tensions des fils.

Vérifier par le dessin que la résultante des tensions est bien égale au poids P.

Réponse : *Les tensions sont égales respectivement à* 204^{kg}, 363^{kg}, 204^{kg}, 363^{kg}. (Juin 1911.)

Épreuve théorique. — *Dans un plan horizontal une barre rectiligne et homogène* OA *est mobile autour de son extrémité* O *qui est fixe. Au point* A *est articulée une barre* AB *identique à* OA.

Tous les points de ce système sont repoussés par le point O proportionnellement à leur masse et à leur distance au point O. Primitivement le système est sans vitesse et la barre AB est perpendiculaire sur OA.



On demande de calculer l'amplitude de l'oscillation de OA.

SOLUTION.

Soit θ l'angle de OA avec une droite fixe et soit φ l'angle de OA prolongée avec AB, on a par les aires

$$(10 + 6 \cos\varphi)\theta' + (2 + 3 \cos\varphi)\varphi' = 0,$$

par les forces vives

$$(10 + 6 \cos\varphi)\theta'^2 + (2 + 3 \cos\varphi)2\theta'\varphi' + 2\varphi'^2 = 2k^2 \cos\varphi.$$

En éliminant θ' on a

$$(7 + 9 \sin^2\varphi)\varphi'^2 = 6k^2(10 + 6 \cos\varphi) \cos\varphi.$$

Donc φ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ et par suite l'amplitude de θ est

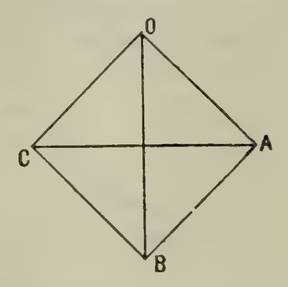
$$\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{2 + 3 \cos\varphi}{10 + 6 \cos\varphi} d\varphi;$$

on a en degrés

$$\theta = 50°9'.$$

Épreuve pratique. — *Un système articulé est formé de six tiges qui constituent les quatre côtés et les deux diagonales d'un carré. Ces six tiges sont tirées du même métal et ont la même section. On suppose qu'elles*

s'allongent ou se raccourcissent proportionnellement à leur longueur et à la charge qu'elles subissent.



On suspend le système par l'un de ses sommets et l'on attache au sommet opposé un poids de 1000kg. *Trouver les tensions des six tiges.*

SOLUTION.

On trouve :

tension de OA = 205kg (extension),
tension de AC = — 289kg (compression),
tension de OB = 711kg (extension).

(Novembre 1911.)

Poitiers.

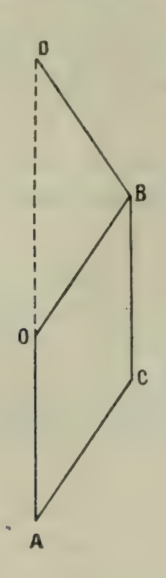
ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une plaque rectangulaire homogène mince* OACB *est articulée en un sommet* B *à une barre* BD (*de masse négligeable vis-à-vis de celle de la plaque*).

Les points O, D *sont fixes sur une verticale. Les liaisons en* O, B, D *n'entraînent aucun frottement appréciable.*

1° *On demande d'écrire les équations différentielles du mouvement* (*en prenant comme paramètres : l'angle* α *du plan* OBD *avec un plan vertical fixe et l'angle* β *de la plaque avec le plan* OBD). *On montrera comment les équations universelles de la dynamique des systèmes permettent d'obtenir deux intégrales premières.*

2° *Prouver que si la force vive initiale du système est*

petite, l'angle β *variera dans un intervalle un peu plus grand que* $(-\beta_0, +\beta_0)$, *où* β_0 *est la valeur initiale de* β.



3° *Étudier en particulier le cas où les vitesses initiales sont nulles et l'angle* β_0 *petit.* (Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une plaque homogène rectangulaire mince de poids* P *est suspendue par quatre fils élastiques verticaux identiques attachés aux quatre sommets de la plaque et dont les quatre autres extrémités sont fixes dans un même plan horizontal* H.

A l'instant initial, le système est en équilibre et l'on abandonne sans vitesse initiale un petit corps sphérique homogène de poids p *sur la verticale du centre de la plaque et au-dessus.*

Étudier le mouvement ultérieur.

Remarque. — *La tension* T *de chaque fil est proportionnelle à l'allongement* $z-l$ *du fil à partir de la longueur naturelle* l

$$T = \lambda(z-l).$$

Après chaque choc, la vitesse relative de la petite sphère par rapport à la plaque est multipliée par $-e$, e *étant*

un coefficient d'élasticité constant. On n'examinera que le cas où la sphère est molle ($e = 0$) *et celui où elle est parfaitement élastique ainsi que la plaque* ($e = 1$).

On négligera les masses des fils et l'on supposera que la sphère est à l'instant initial à une distance du plan H *égale à l.*

On appellera h la longueur initiale de chaque fil.

On supposera $P = p$ *lorsque* $e \neq 0$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Soient* p, ρ *la pression et la densité atmosphériques à l'altitude* z; p_0, ρ_0 *leurs valeurs à la surface de la Terre.*

Déterminer p *en fonction de* z *en supposant que les variations de température de l'atmosphère soient telles qu'on ait*

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const.},$$

γ *étant une certaine constante et en tenant compte des variations de l'intensité de la pesanteur avec* z.

2° *Trouver le moment d'inertie d'un disque circulaire homogène infiniment mince de rayon* R *et de masse* M *par rapport à une droite quelconque* Δ.

On appellera δ *la distance de* Δ *au centre du disque et* α *son angle aigu avec le plan du disque.*

Application numérique. — *La masse du disque est égale à* 2^{kg}, *son rayon vaut* 3^{dm}, $\alpha = 30°$ *et* δ *vaut* 1^{m}.

(Novembre 1911.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — PREMIÈRE QUESTION : Problème. — *Un système de quatre masses, l'une* M_0 *portée par un point fixe* P, *les autres* m_1, m_2, m_3 *portées respectivement par trois points mobiles* A_1, A_2, A_3, *s'attirent mutuellement, proportionnellement aux masses et à leurs distances.*

Les points A_1, A_2, A_3 *sont unis par des liaisons sans*

frottement, de manière que le triangle $A_1A_2A_3$ *reste semblable à un triangle donné.*

Étudier le mouvement des trois masses mobiles.

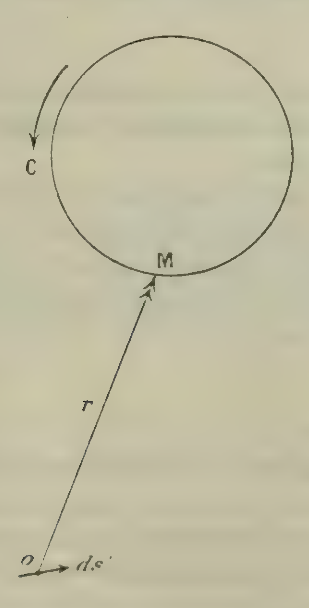
On envisagera particulièrement le cas suivant :

Les masses m_1, m_2, m_3 *sont égales et le triangle* $A_1A_2A_3$ *reste équilatéral.*

De plus, à l'instant initial : 1° *le point* P *coïncide avec le centre de gravité du triangle* $A_1A_2A_3$; 2° *en ce même instant initial la vitesse de chaque sommet* A_i *du triangle résulte d'un mouvement de rotation du triangle solidifié autour d'un axe perpendiculaire à son plan mené par son centre de gravité* g_0 *et d'une vitesse dirigée de* g_0 *vers* A_i, *égale d'ailleurs numériquement à la vitesse linéaire qui serait due à la vitesse initiale* N *de la rotation considérée.*

Seconde question : Statique du corps rigide. — *Exposer la réduction de Poinsot, en déduire la détermination des centres de gravité.*

Épreuve pratique. — *Un conducteur curviligne fermé*



parcouru par un courant électrique d'intensité i agit sur

un élément de courant ds' traversé par un courant d'intensité i' placé sur l'origine d'un système d'axes de coordonnées rectangulaires, et produit sur cet élément une force dont les composantes XYZ *sont, par les formules*

$$X = \frac{1}{2} i i' \, ds' (bC - cB),$$

$$Y = \frac{1}{2} i i' \, ds' (cA - aC),$$

$$Z = \frac{1}{2} i i' \, ds' (aB - bA),$$

formules dans lesquelles abc désignent les cosinus directeurs de l'élément ds' et dans lesquelles les quantités ABC *sont définies par les intégrales curvilignes suivantes :*

$$A = \int_C \varphi(r)(y\,dz - z\,dy),$$

$$B = \int_C \varphi(r)(z\,dx - x\,dz),$$

$$C = \int_C \varphi(r)(x\,dy - y\,dx),$$

où x, y, z désignent les coordonnées d'un point M *du conducteur dont r est la distance à l'origine, φ est une certaine fonction de la distance.*

On demande de transformer les intégrales curvilignes A, B *et* C *en intégrales de surface portant sur une aire quelconque* Σ *appuyée sur le contour* C, *par une triple application du théorème de Stokes.*

(Juin 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe* O *en supposant que l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point est de révolution, et que le corps est soumis à l'action d'une force* F *appliquée en un point de l'axe.*

Déterminer la force nécessaire pour produire un mou-

vement donné de précession et de nutation dans le cas d'une rotation rapide autour de l'axe.

II. *Un plan* P *tourne uniformément autour de la verticale d'un de ses points* O. *Une tige homogène pesante* OA, *de longueur a dont l'une des extrémités est fixée en* O, *est mobile dans le plan* P. *Trouver les positions d'équilibre relatif de la tige, et étudier son mouvement relatif dans le plan. Cas des petites oscillations.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un solide homogène a la forme d'un parallélépipède rectangle dont la base est un carré de côté a, et dont la hauteur est égale à e. On demande de trouver sur l'axe du parallélépipède, perpendiculaire à la base, un point* O *pour lequel l'ellipsoïde d'inertie se réduise à une sphère, et de calculer le moment d'inertie du corps par rapport à une droite quelconque passant en* O. *Conditions de possibilité.*

Applications :

$$a = 20^{\text{cm}},$$
$$c = 12^{\text{cm}}.$$

Densité du corps : 7,5.

(Juin 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Mouvement de Poinsot.*

II. *Un fil flexible et inextensible, de masse négligeable, est enroulé sur un cylindre de révolution pesant, non homogène, mobile sans frottement autour de son axe de figure, qui est horizontal. L'une des extrémités du fil s'attache au cylindre; l'autre pend verticalement et supporte un poids* P.

1° *Étudier le mouvement du système; reconnaître s'il peut être oscillatoire et examiner le cas des petites oscillations.*

2° *Supposant que l'on ait déterminé expérimentalement la durée des petites oscillations pour le cas d'un poids* P, *et ensuite pour le cas d'un poids différent* P′, *et connaissant, d'autre part, la masse du cylindre, on demande de*

calculer le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de suspension, ainsi que la distance du centre de gravité à cet axe.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un récipient à 4° a la forme d'un tétraèdre régulier dont la face supérieure est horizontale. Déterminer la pression du liquide sur chacune des faces latérales ainsi que la position du centre de pression correspondant.* (Novembre 1911.)

QUESTION.

2209. Démontrer *géométriquement* que :

1° Si, sur la tangente en M à un cercle passant par O, on considère le segment MP qui est vu de O sous un angle droit, le lieu du point P, lorsque le point M décrit le cercle, est une cissoïde de Dioclès ;

2° La normale en P à la cissoïde coupe la normale en M au cercle sur la perpendiculaire élevée à OP en son milieu.

(M. d'OCAGNE.)

Un deuil cruel frappe les *Nouvelles Annales :* l'un de ses rédacteurs, M. Carlo Bourlet, a succombé à Annecy, le 12 août, aux suites d'un accident.

C'est un savant d'une haute valeur et un professeur d'une autorité exceptionnelle qui disparaît en Carlo Bourlet, victime, en pleine activité, d'une fatalité inexorable. Le personnel de la Rédaction de ce Journal perd en lui le collaborateur le plus dévoué et l'ami le plus sûr.

Nous tenterons, dans un prochain numéro, de retracer sa carrière et de rendre à son œuvre l'hommage qui lui est dû.

C.-A. Laisant, R. Bricard.

[O2f]

SUR QUELQUES ENVELOPPES;

Par M. L. BRAUDE, à Bierstadt-Wiesbaden.

I.

1. La discussion des enveloppes est souvent assez difficile, quand on applique seulement des coordonnées cartésiennes. En ce cas, il est recommandable de se servir des *coordonnées intrinsèques* (1), c'est-à-dire d'une relation entre l'arc s et le rayon de courbure R.

---

(1) *Voir* E. Wölffing, *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten* (*Bibl. Math.*, 3e série, t. I, 1900, p. 142-159). — Cesàro-Kowalewski, *Vorlesungen über natürliche Geometrie*. Leipzig, B.-G. Teubner, 1901. — Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes planes*. Paris, 1873.

Aux publications de E. Cesàro, dont la plupart se trouvent dans ce journal, et qui sont réunies dans son œuvre ([1]), il y a beaucoup d'exemples dont nous allons généraliser quelques-uns dans cet article. Nous aurons donc des théorèmes connus sous une autre forme ou des propriétés inconnues de certaines familles de courbes planes. Il y a presque toujours une contenance avec les *développées intermédiaires* ([2]) que j'ai définies comme lieu du point, qui divise les rayons de courbure dans un rapport constant.

2. E. Cesàro a défini ([3]) la famille des courbes dénommées d'après lui, qui contient, par exemple, les *spirales sinusoïdes* ([4]), les *courbes de Ribaucour* ([5]), les *cycloïdales* ([6]) et les *coniques*, par la propriété suivante :

Le rayon de courbure $\left(R_1 = R\dfrac{dR}{ds}\right)$ *de la développée est divisé dans un rapport constant par son intersection avec le rayon vecteur.*

Nous profitons de cette propriété pour traiter les *cycloïdales*.

([1]) *Voir* la note ([1]) de la page précédente.

([2]) *Voir* ma Thèse, *Über einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve*. Heidelberg, 1911.

([3]) *Nouvelles Annales*, 3e série, t. VII, 1888, p. 171-190; 3e série, t. IX, 1890, p. 143-157; 3e série, t. XIII, 1894, p. 102-106. — *Voir* aussi Cesàro-Kowalewski, *loc. cit.*, p. 54, ou H. Wieleitner, *Spezielle ebene Kurven*, 1908, p. 303, ou enfin F.-G. Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, t. I, p. 273. Coïmbre, 1908.

([4]) G. Loria, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, II. Auflage, t. I, p. 240; Leipzig, 1910-1911, H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 134; Cesaro, *loc. cit.*, p. 61; Teixeira, *loc. cit.*, p. 259.

([5]) G. Loria, *loc. cit.*, t. II, p. 137; Wieleitner, p. 299; Cesàro p. 94; Teixeira, t. II, p. 282.

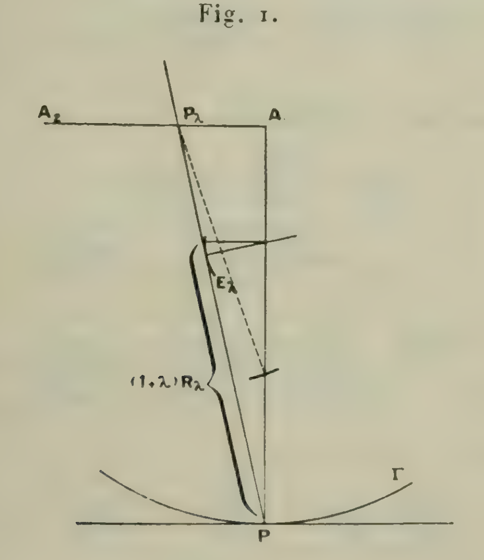
([6]) Wieleitner, p. 195; Cesáro, p. 58; Teixeira, t. II, p. 135.

Nous menons par chaque point P *de la courbe* Γ *et par le point* P_λ, *qui divise le rayon de courbure de la développée de* Γ *au rapport constant* $\frac{1-\lambda}{\lambda}$ *une droite; chercher l'enveloppe* E_λ *de la droite.*

Si Γ est une courbe de Cesàro, nous aurons pour une certaine valeur de λ le pôle O comme enveloppe.

Soient (*fig.* 1) x et y les coordonnées d'un point

Fig. 1.



quelconque par rapport au système [1] de la tangente et de la normale de P. Le premier centre de courbure A_1 de P a donc les coordonnées $x_1 = 0$, $y_1 = R$.

Si R_1, R_2, ... sont les rayons de courbure supérieurs $\left(R_n = R\frac{dR_{n-1}}{ds}\right)$, on a comme coordonnées de P_λ :

(1) $$x_2 = -\lambda R_1, \qquad y_2 = R.$$

L'équation de la droite PP_λ est donc

(1') $$\lambda R x + R_1 y = 0,$$

---

[1] CESÀRO, p. 21; WIELEITNER, p. 173.

ou, comme $R_1 = R\frac{dR}{ds}$,

$$(2)\qquad f(x, y, s) \equiv \lambda x + y\frac{dR}{ds} = 0.$$

Pour avoir x et y comme fonction de s, il faut différentier (2) sous la forme [1]

$$(3)\qquad (y - R)\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

d'où il résulte

$$(4)\qquad x\frac{dR}{ds} - y\left(\lambda + R\frac{d^2R}{ds^2}\right) + \lambda R = 0.$$

On a donc par (2) et (4)

$$(5)\qquad \begin{cases} x = -\dfrac{\lambda R\dfrac{dR}{ds}}{\lambda^2 + \left(\dfrac{dR}{ds}\right)^2 + \lambda R\dfrac{d^2R}{ds^2}}, \\[2ex] y = \dfrac{\lambda^2 R}{\lambda^2 + \left(\dfrac{dR}{ds}\right)^2 + \lambda R\dfrac{d^2R}{ds^2}}, \end{cases}$$

ou, comme

$$(6)\qquad \frac{dR}{ds} = \frac{R_1}{R}, \qquad \frac{d^2R}{ds^2} = \frac{RR_2 - R_1^2}{R^3},$$

$$(7)\qquad \begin{cases} x = -\dfrac{\lambda R^2 R_1}{\lambda^2 R^2 + R_1^2(1-\lambda) + \lambda RR_2}, \\[2ex] y = \dfrac{\lambda^2 R^3}{\lambda^2 R^2 + R_1^2(1-\lambda) + \lambda RR_2}. \end{cases}$$

Si $\lambda = \infty$, (2) représente la normale de Γ [1], soit $x = 0$; par (5) ou (7) on a

$$x = 0, \qquad y = R,$$

le point A_1; si $\lambda = 0$, on a

$$x = 0, \qquad y = 0,$$

---

[1] Cesàro, p. 24; Wieleitner, p. 176.

c'est-à-dire la courbe Γ elle-même. Pour $\lambda = 1$, on cherche l'enveloppe de PA_2 où A_2 est le second centre de courbure de P. L'équation (1) est alors [1]

$$R x + R_1 y = 0 \tag{1α}$$

et l'on a

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{RR_1}{R + R_2}, \\ y &= \frac{R^2}{R + R_2}. \end{aligned}\right. \tag{7α}$$

Si $\lambda = -1$, la droite est menée par P et le point correspondant de l'*antévolute* de la développée de Γ; on a donc [2]

$$R x - R_1 y = 0, \tag{1β}$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{R^2 R_1}{R^2 + 2 R_1^2 - RR_2}, \\ y &= \frac{R^3}{R^2 + 2 R_1^2 - RR_2}. \end{aligned}\right. \tag{7β}$$

3. Pour construire le point de contact $Q(x, y)$, nous nous servons d'une certaine développée imparfaite de Γ. Soit $P_\lambda \left(x = 0, y = \frac{R}{1 + \lambda}\right)$ le point de cette courbe correspondant à $P(0, 0)$, alors la normale au point P_λ est parallèle à la droite (1′), car on a (voir *fig.* 1)

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{dR}{\lambda\, ds} = \frac{R_1}{\lambda R}. \tag{8}$$

Le rayon vecteur PQ est

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\lambda R^2 (\lambda^2 R^2 + R_1^2)^{\frac{1}{2}}}{\lambda^2 R^2 + R_1^2 (1 - \lambda) + \lambda RR_2}. \tag{9}$$

---

(1) Cesàro, p. 37.

(2) Les courbes pour lesquelles toutes les droites (1′) sont parallèles sont des courbes de *Ribaucour*; si $\lambda = -1$, on a une *chaînette d'égale résistance*.

Mais comme le rayon de courbure ([1]) de P_λ est

$$(10) \qquad R_\lambda = \frac{(\lambda^2 R^2 + R_1^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\lambda)[\lambda^2 R^2 + R_1^2(1-\lambda) + \lambda R R_2]},$$

on a enfin

$$(11) \qquad r = \frac{1+\lambda}{\lambda} R_\lambda \cos^2\varphi.$$

On a donc la construction suivante de Q :

Soit M *un point sur* (1′) *de sorte que* $PM = R_\lambda \frac{1+\lambda}{\lambda}$; *quand on projette* M *en* N *sur la normale de* Γ, *la projection de* N *sur* (1′) *est le point* Q.

Pour $\lambda = -3$, on a

$$(12) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{3R^2 R_1}{9R^2 + 4R_1^2 - 3RR_2}, \\ y = \dfrac{9R^3}{9R^2 + 4R_1^2 - 3RR_2}. \end{cases}$$

Le lieu de (12) est d'après Cesàro ([2]) le lieu des centres des coniques osculantes la courbe Γ.

Au général, l'enveloppe (7) *est le lieu des centres des cercles directeurs des courbes de Cesàro de l'indice* $n = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, *qui osculent la courbe* Γ.

Si le rayon du cercle osculateur est zéro, les courbes de Cesàro sont des *spirales sinusoïdes;* si $r = \infty$, on a des *courbes de Ribaucour.*

Au système (tangente normale), l'équation de la directrice est ([3])

$$(13) \qquad x\frac{1+n}{1-n}\frac{dR}{ds} - y + \frac{n+1}{2}R = 0.$$

([1]) *Thèse*, p. 16.

([2]) Cesàro, p. 77-78.

([3]) Cesàro, p. 77.

Mais cette droite est la tangente de la dérivée imparfaite $\lambda = \frac{1-n}{1+n}$, car, en différentiant (13) d'après (3), on a

$$x\frac{dR}{\lambda\, ds} - y + \frac{R}{1+\lambda} = 0, \tag{13a}$$

$$x\left(1 + \frac{RR_2 - R_1^2}{\lambda R^2}\right) + y\frac{R_1}{\lambda R} - \frac{R_1}{\lambda(1+\lambda)} = 0, \tag{13b}$$

d'où

$$x = 0, \qquad y = \frac{R}{1+\lambda}.$$

Nous avons donc une nouvelle génération des développées imparfaites, soit :

Les directrices des courbes de Ribaucour d'indice $n = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, *qui osculent la courbe* Γ, *enveloppent la développée imparfaite* λ.

Comme cas spécial, les directrices des *cycloïdes* osculantes ($n = 0$) enveloppent la *développée moyenne* ($\lambda = 1$), celles des *paraboles* osculantes ([1]) ($n = -2$) enveloppent la développée $\lambda = -3$, enfin celle des *chaînettes* osculantes ([2]) ($n = -3$) enveloppent l'*antévolute* ($\lambda = -2$).

Exemples. — I. Pour les *cycloïdales* ([3])

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{R^2}{b^2} = 1, \tag{14}$$

([1]) Cesàro trouve comme lieu du point de contact $x = 0$, $y = -\frac{R}{2}$ (*voir* p. 78).

([2]) Cette développée imparfaite fut définie par Jacques Bernoulli, *Lineæ cycloïdales, evolutæ, antevolutæ, etc.* (*Acta Erud.*, mai 1692). — *Thèse*, p. 18.

([3]) Loria, t. II, p. 105; Cesàro, p. 83.

on a comme développées des trochoïdes du même module.

Alors les directrices des courbes de Ribaucour d'un module quelconque osculant la courbe (14) *enveloppent une certaine trochoïde.*

Si $\lambda = \pm \frac{b}{a}$ on a comme trochoïde le cercle directeur et nous trouvons :

Les directrices des courbes de Ribaucour de l'indice

$$(15) \qquad n_1 = \frac{a-b}{a+b} \qquad \text{ou} \qquad n_2 = \frac{a+b}{a-b}$$

osculant (14), *enveloppent le cercle directeur.*

Pour l'*hypocycloïde tricuspidale*, la développée imparfaite $\lambda = 3$ ou $\lambda = -3$ est la circonférence, menée par les rebroussements; au dernier cas les courbes osculantes sont des *paraboles* [1].

Soit (14) une *astroïde droite*

$$(16) \qquad 4s^2 + R^2 = C^2,$$

Alors la circonférence menée par les rebroussements est reçue comme enveloppe des directrices des *chaînettes* et des *astroïdes obliques* [2] osculant ($\lambda = -2$).

La développée imparfaite $\lambda = -\frac{b^2}{a^2}$ de (14) est [3] une rhodonée, la podaire de la développée. Alors on trouve :

---

(1) Cette génération se trouve dans Cesàro, p. 78.

(2) Wieleitner, p. 301, *voir* mon article aux *Monatshefte*, de Vienne : *Über Parallelkurven der Epi- und Hypozykloïden*, 1913, p. 186.

(3) *Thèse*, p. 22. Quant aux rhodonées, *voir* Loria, t. I, p. 358; Wieleitner, p. 238; Teixeira, p. 211.

Les directrices des courbes de Ribaucour de l'indice $n' = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ *osculant la courbe* (14) *est une rhodonée du module* $\frac{b}{a}$.

II. Pour les courbes parallèles à (14) qui ont les coordonnées intrinsèques

$$(17) \qquad s = a(\varphi - \sin\varphi), \qquad R = b(1-\cos\varphi),$$

les développées intermédiaires $\lambda = \pm\frac{b}{a}$ sont deux cycloïdales, qui ont la même base circulaire ([1]). Elles sont *anticycloïdales*, leurs rebroussements sont situés dans chaque deuxième rebroussement de la développée de (17).

Par exemple, les directrices des chaînettes osculant l'astroïde oblique à deux points triples, enveloppent une *néphroïde de Proctor*.

III. Comme la développée imparfaite $\lambda = \frac{1-n}{1+n}$ d'une *spirale sinusoïde* de l'indice n est ([2]) une courbe analogue de l'indice $n_1 = \frac{n}{1-n}$, nous trouvons :

Les directrices des courbes de Ribaucour de module $\frac{1}{n}$, *qui osculent une spirale sinusoïde du module* n, *enveloppent une spirale sinusoïde de l'indice* $\frac{n}{1-n}$.

IV. Enfin chaque développée intermédiaire d'une spirale logarithmique

$$(18) \qquad R = as$$

([1]) *Voir* la note ([2]) de la page précédente.
([2]) *Thèse*, p. 41.

est une spirale congruente [1]. *Alors l'enveloppe des directrices des courbes de Ribaucour d'un module quelconque, qui osculent la spirale* (18), *est une spirale congruente, qui a le même pôle.*

4. Pour avoir les coordonnées intrinsèques de E_λ, nous formons [2], d'après Cesàro :

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta x}{ds} = \dfrac{dx}{ds} - \dfrac{y}{R} + 1 = -R_1 U, \\ \dfrac{\delta y}{ds} = \dfrac{dy}{ds} + \dfrac{x}{R} \qquad = \lambda R U, \end{cases}$$

où

$$(19')\quad U = \frac{(\lambda-1)R_1[\lambda^2 R^2 + R_1^2 + 3\lambda(RR_2 - R_1^2) + \lambda^2 R(R_1 R_2 - RR_3)]}{[\lambda^2 R^2 + R_1^2(1-\lambda) + \lambda RR_2]^2}.$$

Alors $U = 0$ est l'équation différentielle des courbes de Cesàro [3] pour lesquelles l'enveloppe E_λ est un point fixe. Les coordonnées intrinsèques de E_λ sont :

$$(20)\quad \begin{cases} s' = \displaystyle\int \sqrt{\lambda^3 R^2 + R_1^2}\, U\, ds, \\ R' = \dfrac{U R(\lambda^2 R^2 + R_1^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^2 R^2 + R_1^2(1-\lambda) + \lambda RR_2} = U RR_\lambda(1+\lambda). \end{cases}$$

Si $\lambda = 1$, on a pour l'enveloppe de (1_α)

$$(21)\quad \begin{cases} s'_1 = \displaystyle\int \frac{(R_1 R_2 - RR_3)\sqrt{\lambda^2 R^2 + R_1^2}}{R(R+R_2)^2}\, ds, \\ R'_1 = \dfrac{(R_1 R_2 - RR_3)(R^2 + R_1^2)^{\frac{3}{2}}}{(R+R_2)^4}. \end{cases}$$

Exemples. — I. Soit Γ la cycloïdale

$$(22)\quad s^2 + \frac{R^2}{\lambda^2} = 1.$$

---

[1] *Thèse*, p. 22.

[2] Cesàro, p. 21-24; Wieleitner, p. 174-175.

[3] Cesàro, p. 77.

En faisant $s = \cos\varphi$, $R = \lambda \sin\varphi$, nous avons, d'après (7),

$$(23)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\lambda}{1+\lambda} \sin^2\varphi \cos\varphi, \\ y = \dfrac{\lambda}{1+\lambda} \sin^3\varphi, \end{cases}$$

d'où, selon (19),

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta x}{ds} = \dfrac{1-3\lambda}{1-\lambda} \cos^2\varphi, \\ \dfrac{\delta y}{ds} = \dfrac{1-3\lambda}{1-\lambda} \cos\varphi \sin\varphi. \end{cases}$$

Les coordonnées intrinsèques de P_λ sont alors ([1])

$$(25)\quad \begin{cases} s' = \displaystyle\int ds \sqrt{\left(\frac{\delta x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{ds}\right)^2}, \\ R' = \sqrt{\left(\dfrac{\delta x}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta y}{ds}\right)^2} \left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{d}{ds} \operatorname{arc\,tang} \dfrac{\delta y}{dx}\right) \end{cases}$$

ou

$$(26)\quad \begin{cases} s' = \dfrac{1-3\lambda}{4(1-\lambda)} \cos 2\varphi, \\ R' = \dfrac{\lambda(1-3\lambda)}{4(1-\lambda)} \sin^2\varphi. \end{cases}$$

Alors l'équation intrinsèque de P_λ est

$$(27)\quad 4\lambda^2 s'^2 + (1-\lambda)^2 R'^2 = \left[\frac{\lambda(1-3\lambda)}{2(1-\lambda)}\right]^2.$$

En remplaçant λ par $-\lambda$, nous avons de même

$$(27')\quad 4\lambda^2 s'^2 + (1+\lambda)^2 R'^2 = \left[\frac{\lambda(1+3\lambda)}{2(1+\lambda)}\right]^2.$$

Mais comme la développée intermédiaire $\pm\lambda$ de (22) est la circonférence fondamentale, nous avons le théorème suivant :

([1]) Cesàro, p. 21-24; Wieleitner, p. 175.

Lorsque la normale de la cycloïdale (22) *coupe la circonférence aux points* P_λ *et* $P_{-\lambda}$, *les enveloppes des droites, menées par* P, *parallèles aux normales de* P_λ *et de* $P_{-\lambda}$, *sont deux cycloïdales* (27) *et* (27').

Si $\lambda = \pm 1$, (22) est une *cycloïde;* au premier cas toutes les droites sont parallèles, (27') est une *cycloïde congruente.*

Si $\lambda = \pm 3$, (22) est une *hypocycloïde tricuspidale*, (27) une courbe semblable, (27') une hypocycloïde à six rebroussements.

Soit $\lambda = \pm \frac{1}{2}$; alors (22) est une néphroïde de Proctor [1], (27) une astroïde.

Si $\lambda = \pm \frac{1}{3}$, (22) est une *cardioïde;* au premier cas on a un point, le rebroussement réel; au second une *néphroïde.*

II. Pour la spirale logarithmique, dont l'équation

$$(28) \qquad R = as.$$

l'angle φ est toujours constant; on a donc une *développoïde* congruente.

II.

5. Dans ce qui suit, nous voulons chercher les enveloppes de quelques systèmes de circonférences. Chaque courbe est l'enveloppe de ses cercles osculateurs; *c'est pourquoi nous voulons dilater les cercles osculateurs du centre ou du point de contact et déterminer l'enveloppe.*

---

(1) C. Proctor, *A treatise on the cycloid and all forms of the cycloidal curves*, p. 176, London, 1878; Loria, t. II, p. 113; Wieleitner, p. 139. *Voir* aussi la Thèse de R.-C. Archibald, *The cardioide and some of its related curves*, Strasbourg, 1900, et mon article, cité à la note (3) de la page 344.

Au premier cas l'équation de la circonférence dilatée est

(29) $$x^2 + (y - R)^2 - \mu^2 R^2 = 0,$$

d'où l'on a, d'après (3),

(30) $$\begin{cases} x = \pm R\mu\sqrt{1 - \mu^2}, \\ y = \quad R(1 - \mu^2). \end{cases}$$

Il y a donc une enveloppe seulement si $\mu < 1$, c'est-à-dire en contractant les cercles. En faisant $\mu = \cos\alpha$, on a

(31) $$x = \pm R \sin\alpha \cos\alpha, \qquad y = R \sin^2\alpha.$$

Mais le lieu (¹) de ces points est composé de deux développoïdes aux angles $\pm\alpha$; nous avons donc le théorème :

L'enveloppe des cercles osculateurs contractés du centre de courbure se décompose en deux développoïdes.

Cette génération nous rappelle la construction du point de contact par Réaumur (²).

6. *Dilatons les cercles osculateurs des points de contact; le lieu de ses centres est alors une certaine développée intermédiaire.*

L'équation du cercle est

(32) $$x^2 + (y - \mu R)^2 = \mu^2 R^2$$

ou

(33) $$f(x, y, s) \equiv x^2 + y^2 - 2\mu R y = 0.$$

En différentiant d'après (3), on a

(34) $$(\mu - 1) R x - \mu R_1 y = 0.$$

(¹) Wieleitner, p. 177.
(²) Loria, t. II, p. 262; Wieleitner, p. 177.

Cette droite, dont nous avons déjà trouvé l'enveloppe, est parallèle à la normale du lieu de $x = 0$, $y = \mu R$, c'est-à-dire du centre de (32). En faisant

$$(35) \qquad \mu = \frac{1}{1+\lambda}, \qquad \lambda = \frac{1-\mu}{\mu},$$

nous avons par (33) et (34)

$$(35) \quad x = \frac{-2\lambda R^2 R_1}{(1+\lambda)(\lambda^2 R^2 + R_1^2)}, \qquad y = \frac{2\lambda^2 R^3}{(1+\lambda)(\lambda^2 R^2 + R_1^2)}.$$

On a donc, d'après (8),

$$(36) \qquad \sqrt{x^2+y^2} = \frac{2R}{1+\lambda}\cos\varphi,$$

d'où il résulte :

Lorsque la circonférence (32) *coupe la normale de* Γ *encore au point*

$$P'\left(x = 0,\ y = \frac{2R}{1+\lambda}\right)$$

la projection de P' *sur la droite* (34)

$$(37) \qquad \lambda R x + R_1 y = 0$$

est le point de contact; la normale de l'enveloppe contient naturellement le centre de (32).

De même le lieu de (35) a la qualité suivante :

C'est le lieu des pôles des spirales sinusoïdes de l'indice $n = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ *qui osculent la courbe* Γ.

Cesàro avait trouvé [1] comme cas spéciaux le lieu des foyers de *paraboles* osculantes $\left(n = -\frac{1}{2},\ \lambda = 3\right)$,

---

[1] Cesàro, p. 79-80.

et le lieu des centres des *hyperboles équilatères* osculantes ($n = -3$, $\lambda = -2$).

Exemples. — I. Soit Γ la cycloïdale (22). Nous avons donc (35) :

$$(38)\qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{2\lambda}{1+\lambda}\cos\varphi\sin^2\varphi, \\ y &= \frac{2\lambda}{1-\lambda}\sin^3\varphi, \end{aligned} \right.$$

et d'après (19)

$$(39)\qquad \frac{\delta x}{ds} = \frac{1-3\lambda}{1+\lambda}\cos 2\varphi, \qquad \frac{\delta y}{ds} = \frac{1-3\lambda}{1+\lambda}\sin 2\varphi.$$

Les coordonnées intrinsèques de l'enveloppe sont alors

$$(40)\qquad s' = \frac{1-3\lambda}{1+\lambda}s, \qquad R' = \frac{1-3\lambda}{(1+\lambda)(1-2\lambda)}R,$$

et son équation intrinsèque

$$(41)\qquad \lambda^2 s'^2 + (1-2\lambda)^2 R'^2 = \left[\frac{\lambda(3\lambda-1)}{\lambda+1}\right]^2.$$

Pour $E_{-\lambda}$, on a

$$(42)\qquad \lambda^2 s'^2 + (1+2\lambda)^2 R'^2 = \left[\frac{\lambda(3\lambda+1)}{\lambda-1}\right]^2.$$

Mais comme les développées intermédiaires $\pm\lambda$ de (22) sont la base circulaire, nous avons le théorème :

Lorsque la normale au point P *de la cycloïdale* (22) *coupe la circonférence aux points* P_1 *et* P_2, *les enveloppes des circonférences dont* PP_1 *et* PP_2 *sont des diamètres se décomposent toujours en* (22) *et une autre cycloïdale* (42) *ou* (41).

II. Traitons comme exemple les développantes des cycloïdales, dont les coordonnées intrinsèques sont (17) :

$$(43)\qquad s = \varphi - \sin\varphi, \qquad R = \lambda(1-\cos\varphi).$$

Par élimination de φ, on a comme *équation intrinsèque*

$$(44) \qquad s = \frac{1}{\lambda}\int dR\sqrt{\frac{R}{2\lambda - R}}.$$

D'après (35), on a

$$(45) \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\sin\varphi(1-\cos\varphi), \\ y = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}(1-\cos\varphi)^2 \end{cases}$$

et

$$(46) \qquad \frac{dx}{ds} = -\frac{\lambda}{1+\lambda}(1+2\cos\varphi), \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{2\lambda}{1+\lambda}\sin\varphi.$$

On trouve donc selon (19)

$$(47) \qquad \frac{\delta x}{ds} = \frac{1-2\lambda}{1+\lambda}\cos\varphi, \qquad \frac{\delta y}{ds} = -\frac{1-2\lambda}{1+\lambda}\sin\varphi,$$

et d'après (25)

$$(48) \qquad \begin{cases} s' = \dfrac{2\lambda-1}{1+\lambda}(\varphi - \sin\varphi), \\ R' = \dfrac{\lambda(2\lambda-1)}{1-\lambda^2}(1-\cos\varphi). \end{cases}$$

En changeant λ en $-\lambda$, on a de même :

$$(49) \qquad \begin{cases} s'' = \dfrac{2\lambda+1}{1-\lambda}(\varphi - \sin\varphi), \\ R'' = \dfrac{\lambda(2\lambda+1)}{1-\lambda^2}(1-\cos\varphi). \end{cases}$$

L'équation intrinsèque a la forme

$$(48') \qquad R' = \frac{2\lambda-1}{1+\lambda}\left(1-\cos\frac{\lambda}{\lambda-1}\omega\right)$$

ou

$$(49') \qquad R'' = \frac{2\lambda+1}{1-\lambda}\left(1-\cos\frac{\lambda}{\lambda+1}\omega\right).$$

Pour les développantes des cycloïdales (73), les dérivées sont des courbes analogues, les développées intermédiaires sont, comme nous l'avons déjà mentionné, deux cycloïdales analogues.

[I2e]

SUR LES CONDITIONS DE DIVISIBILITÉ D'UN PRODUIT DE FACTORIELLES PAR UN AUTRE (SUPPLÉMENT);

Par M. E. LANDAU, à Göttingen.

Dans le Tome XIX (1900) de la 3e série de ce Recueil (p. 344-362 et 576), j'ai publié un Mémoire sous ce titre. Son résultat principal est le théorème du nº IV, cité seul dans mon résumé au Tome XXXI du *Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik* (p. 183-184) et dans les Traités sur la *Théorie des nombres* par Kronecker-Hensel (t. I, p. 500-501) et Bachmann (*Niedere Zahlentheorie*, t. I, p. 64). Je n'ai rien à ajouter concernant ce théorème. Mais tout récemment MM. Hurwitz et Pólya ont remarqué indépendamment que la démonstration du théorème à la fin du nº III (qui n'est pas appliqué dans la suite ni dans aucun de mes travaux ultérieurs) contient une inexactitude. Elle est cependant, comme M. Pólya me l'a communiqué bientôt après, facile à rectifier, de sorte que le théorème même du nº III est juste.

Étant données [1] q formes linéaires à coefficients

---

[1] Je numérote ici consécutivement les

$$u_\sigma \quad (1 \leq \sigma \leq m) \qquad \text{et} \qquad v_\tau \quad (1 \leq \tau \leq n)$$

du nº III.

entiers avec r variables x_i $(i = 1, \ldots, r)$

$$L_\nu(x) = \gamma_{\nu 1} x_1 + \ldots + \gamma_{\nu r} x_r \qquad (\nu = 1, \ldots, q),$$

il s'agit de démontrer ceci : Soit donné un système de valeurs réelles $z_1, \ldots, z_r$ telles que les $L_\nu(z)$ sont tous $\geqq 0$; on peut trouver pour les variables des valeurs commensurables $y_1, \ldots, y_r$ telles que

$$(1) \quad [L_1(y)] = [L_1(z)], \qquad \ldots, \qquad [L_q(y)] = [L_q(z)].$$

La preuve indiquée pour ceci à l'endroit cité est incorrecte ; voici le raisonnement correct de M. Pólya :

On peut supposer qu'aucune des formes $L_\nu(x)$ ne soit identiquement nulle.

1. Si aucun des q nombres $L_\nu(z)$ n'est entier, l'assertion est évidente, puisque des changements suffisamment petits des x n'altèrent pas, dans ce cas, les nombres $[L_\nu]$.

2. S'il y a $s \geqq 1$ entiers parmi les $L_\nu(z)$, supposons, ce qui est permis, que $L_1(z), L_2(z), \ldots, L_s(z)$ $(1 \leqq s \leqq q)$ soient entiers, que les formes $L_1(x), L_2(x), \ldots, L_t(x)$ $(1 \leqq t \leqq s)$ soient indépendantes, tandis que, pour $t < s$, les formes $L_{t+1}(x), \ldots, L_s(x)$ en dépendent. Soit ϖ le nombre des variables dont $L_1, \ldots, L_t$ (ou, ce qui revient au même, $L_1, \ldots, L_s$) dépendent *effectivement*.

a. Si $\varpi = t$, les valeurs des ϖ variables sont rationnelles ; on conserve ces valeurs pour le nouveau système (y). Pourvu qu'on donne, pour $\varpi < r$, aux $r - \varpi$ variables restantes des valeurs rationnelles y_i suffisamment rapprochées des anciennes valeurs z_i, (1) est satisfait.

b. Si $\varpi > t$, on peut donner à certaines $r - t$ va-

riables des valeurs nouvelles et rationnelles s'écartant si peu des anciennes valeurs qu'en calculant les t autres variables au moyen des t équations linéaires

$$L_1(y) = L_1(z), \quad \ldots, \quad L_t(y) = L_t(z),$$

(1) est satisfait; tous les y seront rationnels.

LUCIEN LÉVY.

I. Lucien Lévy naquit à Paris, le 7 octobre 1853. Après des études littéraires, marquées de brillants succès au Concours général, où il remportait des prix de vers latins et de thème latin, il se tourna vers la Science. Élève de M. Darboux, au Lycée Louis-le-Grand, en Mathématiques spéciales, il fut reçu à l'École Polytechnique en 1872. Aucune des carrières qui s'ouvraient à lui, quand il en sortit, ne le sollicitait autant que l'Enseignement, auquel il résolut de se consacrer. Agrégé des Sciences mathématiques, en 1876, il vint à Rennes occuper une chaire de Mathématiques élémentaires; puis, nommé à Paris en 1880, il resta jusqu'en 1885 professeur, au Lycée Louis-le-Grand, de la division préparatoire à l'École Polytechnique (aujourd'hui classe de Mathématiques spéciales préparatoires). C'est à cette période que remontent ses premières publications scientifiques.

En 1885, Lucien Lévy abandonna sa place pour occuper les fonctions importantes de directeur des études scientifiques à Sainte-Barbe. A cette époque, le célèbre établissement traversait une crise et voyait son antique prestige diminué. La reconstruction de l'École préparatoire avait éloigné une partie des

familles. En outre, l'enseignement, privé de direction depuis plusieurs années, laissait à désirer, malgré la valeur personnelle des professeurs. En un mot, presque tout était à reconstituer. Ajoutons enfin que le jeune directeur, ancien élève de Sainte-Barbe, retrouvait parmi ses subordonnés plusieurs de ses maîtres d'autrefois, et que son autorité allait avoir à s'exercer dans des conditions particulièrement délicates. Lucien Lévy accepta courageusement une tâche dont il sentait toutes les difficultés, et n'y faillit pas. Il fut à la fois ferme et conciliant, réchauffa le zèle de ses collaborateurs, releva la discipline et réorganisa les enseignements. Le succès ne se fit pas attendre. Au bout de deux ans, un de ses élèves était reçu le premier à l'École Polytechnique et à l'École Normale. Un autre se classait avec le même rang au concours d'admission à Saint-Cyr, puis à celui de l'École forestière. Lucien Lévy mettait au nombre des plus intéressantes de sa vie ses cinq années de direction, si fécondes en résultats.

En 1890, cependant, il changeait encore une fois l'orientation de sa vie : nommé examinateur d'admission à l'École Polytechnique, il lui fallait abandonner Sainte-Barbe.

Dans un article où Lucien Lévy résumait beaucoup plus tard les résultats de son expérience (1), il analysait d'une façon pénétrante les difficultés de l'art d'examiner. L'examinateur doit d'abord, cela va sans dire, posséder parfaitement les matières sur lesquelles il interroge, et particulièrement connaître toutes les démonstrations qui ont cours dans l'enseignement. Dans les exercices d'application, il lui faut juger du premier coup d'œil la valeur de la méthode proposée par le candidat (si celui-

---

(1) *Examens et examinateurs* (*Revue du Mois*, 1906, p. 139).

ci en propose une), quand même lui, examinateur, n'aurait pas songé à cette méthode. Il doit, et c'est la partie de la tâche la plus délicate, faire la part de la mémoire et de l'intelligence, savoir poser la question, parfois d'apparence insignifiante, qui jettera le jour sur la valeur réelle de l'examiné, et dissoudra, pour ainsi dire, le vernis de la préparation. Lucien Lévy avait l'érudition, la vivacité d'esprit et la finesse de jugement. Il excella du premier coup dans ses nouvelles fonctions et ne cessa d'y exceller pendant vingt ans qu'il les remplit. Très maître de lui-même, il fut toujours d'une courtoisie parfaite et n'eut jamais à regretter une observation blessante ou seulement un peu vive dans sa forme. Pour apprécier une pareille égalité d'humeur, il faut savoir que les examens d'admission à l'École Polytechnique exigent un travail de sept ou huit heures par jour pendant plus de deux mois. Au cours de ces longues séances, l'attention ne doit pas défaillir un seul instant. Peut-être faut-il excuser l'examinateur qui, excédé de cet effort intense et prolongé, se laisse parfois entraîner à un mouvement d'impatience. Ne toléra-t-on pas jadis le légendaire Lefébure de Fourcy qui disait à un candidat (je tiens le récit du candidat lui-même, qui fut plus tard directeur des études à l'École Polytechnique) lui coupant la parole dès les premiers mots d'une démonstration : « Monsieur, vous êtes un âne, et votre professeur en est un autre? »

Ce n'est certes pas au nom de Lucien Lévy qu'on attachera de telles anecdotes. Il ne laissera pas non plus le souvenir d'un examinateur à « bateaux », comme disent les jeunes justiciables du tribunal redouté. Son répertoire de questions était extrêmement riche, et, en dehors des périodes d'examen, il travaillait sans cesse à l'étendre encore.

Il se donna entièrement à ses fonctions, au point de négliger des études brillamment commencées et qui l'auraient certainement conduit à de belles découvertes. Lucien Lévy n'apportait aucune restriction à l'exercice de ses devoirs. J'ajouterai enfin, s'il m'est permis de me mêler à ces souvenirs, qu'ayant eu l'honneur d'examiner pendant deux ans à ses côtés, j'ai pu apprécier par moi-même les qualités auxquelles je viens de rendre hommage. Pas une note qu'il n'ait arrêtée sans une longue délibération intime, et qu'il ne fût en mesure de justifier par les raisons à la fois les plus minutieuses et les plus péremptoires, quand nous échangions nos impressions sur le mérite des candidats que nous avions interrogés.

En 1910, Lucien Lévy devint titulaire d'un poste encore plus important que celui d'examinateur d'admission, celui d'examinateur de sortie pour la Mécanique. Il n'est pas douteux qu'il ne l'eût rempli avec la même distinction que le précédent. Les circonstances ne le permirent malheureusement pas. Peu de temps après sa nomination, une première attaque vint, pour la première fois de sa vie, l'obliger à un long repos. Il dut se faire suppléer. Revenu à la santé, il le croyait du moins (ou bien affectait de le croire, pour calmer l'inquiétude de son entourage), il voulut reprendre son service en 1911. Une seconde attaque le terrassa : la nature lui signifiait qu'il fallait renoncer à toute vie active, et bientôt, hélas! à toute vie. Une année s'écoula encore, marquée d'attaques de plus en plus rapprochées et dont chacune laissait des traces toujours plus profondes. Mais, jusqu'au dernier moment, l'intelligence fut intacte. Qui pourra dire les sentiments intimes de cet homme, jeune encore, frappé en pleine activité, au moment où l'effort de sa vie venait de recevoir une

récompense méritée, et qui, dans la lucidité que lui laissait le mal impitoyable, voyait s'approcher l'heure qui le ravirait pour toujours à l'affection des siens? S'il connut l'angoisse, ses proches et ses amis n'en ont rien su. Son souriant stoïcisme ne se démentit pas un seul instant. Il suivait avec calme les manifestations de sa maladie, en parlant comme de phénomènes extérieurs, et s'inclinant devant la cause qui les déterminait comme il nous faut nous incliner devant la loi de l'attraction universelle. Ses derniers entretiens semblaient commenter la pensée de l'Empereur-philosophe : « Univers, je veux ce que tu veux. » On ne vit pas non plus son cœur se rétrécir à l'approche de la mort, et ses amis reçurent des marques suprêmes de dévouement. Enfin le 2 août 1912 mit un terme à de cruelles souffrances physiques et sans doute morales. Sa belle fin résignée fut celle d'un sage.

Pendant ses dernières et douloureuses années, il avait trouvé une consolation dans les succès de son fils Paul, qu'il vit sortir le premier de l'École Polytechnique, et se signaler bientôt par des travaux qui lui ont tout de suite assuré une place des plus distinguées parmi nos jeunes géomètres.

J'ajouterai enfin, pour achever de retracer la carrière de Lucien Lévy, qu'il était, depuis 1890, professeur à la Maison d'éducation de la Légion d'honneur de Saint-Denis, et qu'il suppléa Eugène Rouché dans son cours du Conservatoire des Arts-et-Métiers. Il était officier de la Légion d'honneur, et la Société mathématique de France l'avait élu comme président pour l'année 1910-1911.

II. Avant de résumer l'œuvre de Lucien Lévy, il convient de dire que l'homme fut supérieur à cette

œuvre. La poursuite de longues recherches exige un détachement égoïste qu'il ne connut pas. Au-dessus du soin de sa réputation, il mit toujours le souci des devoirs immédiats : devoir professionnel, devoirs envers ses proches et envers ses amis, devoirs de bienfaisance. Jamais Lucien Lévy n'usa pour lui-même d'un loisir qu'il pouvait employer à soulager une infortune, et l'on ne saurait dire, par exemple, le temps que lui prirent ses fonctions de trésorier de l'Association amicale des anciens Barbistes. Chargé des occupations dont son cœur avait multiplié le nombre, ce n'est pas sans un vif regret, souvent confié à ses intimes, qu'il interrompit prématurément ses travaux remarqués sur les équations aux dérivées partielles et sur les systèmes orthogonaux. Ajoutons que son esprit était actif dans tous les domaines et que les questions de l'ordre le plus divers le sollicitaient. Il y a une vingtaine d'années, le *National* publiait régulièrement des articles signés L. Livet (ce n'est plus une indiscrétion que de livrer le secret de ce pseudonyme), remplis d'idées originales et vivement exprimées, sur l'enseignement, sur l'avancement des officiers, sur l'assistance par le travail... et sur l'hymne à Apollon, récemment retrouvé, car la musique fut son art de prédilection. J'ai cité plus haut l'article *Examens et examinateurs* que liront toujours avec profit ses successeurs dans les fonctions qu'il a supérieurement exercées.

Le premier travail publié de Lucien Lévy remonte à 1880. Il fait connaître une simplification d'ordre pratique dans l'application de la méthode de Gauss à l'approximation des quadratures. Plusieurs Notes ultérieures, insérées aux *Comptes rendus*, au *Bulletin de la Société mathématique*, concernent la théorie de l'électricité, l'optique géométrique et l'optique phy-

sique. Mais j'arrive tout de suite au beau Mémoire intitulé : *Sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre*, et inséré au 56e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (1886). La méthode exposée comprend comme cas limite la célèbre méthode de Laplace pour l'intégration des équations de la forme

$$s + ap + bq + c\theta = 0,$$

où θ est la fonction inconnue. Elle conduit à la solution d'un important problème sur les congruences de droites. Dans ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, M. Darboux a mentionné ce travail avec éloges.

Citons encore des Notes sur l'équation d'Euler et de Poisson, sur les pavages à l'aide de polygones réguliers, etc. Mais les travaux les plus importants concernent la théorie des systèmes triples orthogonaux. Ils sont exposés dans une Note insérée en 1891 au *Bulletin des Sciences mathématiques*, dans un Mémoire paru en 1892 au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, et dans un autre Mémoire couronné par l'Académie royale de Belgique (1896). Dans le premier travail, l'auteur établit que la sphère et le plan sont les seules surfaces qui puissent, dans tous les mouvements possibles, engendrer une famille de Lamé. C'est, croyons-nous, le premier résultat obtenu dans l'étude du problème ardu et non encore complètement résolu, qui consiste à trouver toutes les surfaces pouvant engendrer une famille de Lamé dans plusieurs mouvements. Dans le second travail, Lucien Lévy aborde des cas plus compliqués. Enfin le Mémoire couronné par l'Académie de Belgique, après une partie historique étendue dont la rédaction suppose un labeur considérable, contient de nouveaux résultats. Plusieurs des

théorèmes obtenus comptent au nombre des plus élégants qu'aient rencontrés les chercheurs dans cette voie difficile.

Lucien Lévy s'est occupé aussi de statique graphique et de l'étude des mouvements dans lesquels tous les points d'une figure invariable décrivent des lignes sphériques.

On lui doit, en outre, un Traité d'arithmétique élémentaire et deux autres importants ouvrages didactiques. Par l'originalité des vues qui s'y manifeste en bien des pages, par le travail de coordination qu'ils ont exigé, ces derniers honorent certes leur auteur autant que bien des Mémoires consacrés à des problèmes d'intérêt secondaire. Le premier est un *Précis de la théorie des fonctions elliptiques avec Tables numériques et applications*. Le titre même de l'Ouvrage suffit presque à en définir le caractère. Lucien Lévy l'a surtout écrit à l'usage des ingénieurs désireux d'utiliser pratiquement les fonctions elliptiques. Sans doute son respect de la Science lui interdisait toute négligence dans l'exposition de la théorie, et cette exposition est en effet irréprochable. Mais il la dirige en vue des applications, surtout des applications mécaniques, qui sont traitées jusque dans leurs derniers détails. Le second Ouvrage, écrit en collaboration avec Eugène Rouché, est un *Traité d'Analyse infinitésimale à l'usage des Ingénieurs,* qui fait partie de l'Encyclopédie de M. Lechalas. Il témoigne encore d'un effort et d'une érudition considérables. En particulier, ce Traité paraît être le premier Livre français où le calcul des variations soit exposé avec l'ampleur que comporte ce vaste sujet.

Lucien Lévy a enfin rédigé, pour l'édition française de l'Encyclopédie mathématique, un article d'une centaine de pages, actuellement sous presse, sur l'étude

des éléments géométriques qu'utilise la Mécanique. Il y consacra beaucoup de labeur et de réflexion. Ce fut là son dernier travail, comme s'il eût convenu que l'existence de Lucien Lévy s'achevât par une œuvre de pur dévouement à la Science.

Raoul BRICARD.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

Épreuve théorique. — I. Questions de cours. — 1° *Exposer le théorème de Lagrange et Dirichlet sur la stabilité de l'équilibre d'un système; faire voir que, les forces extérieures demeurant les mêmes et le système étant placé dans une position satisfaisant aux conditions de Lagrange et Dirichlet, la stabilité de l'équilibre du système pour cette position subsistera après l'adjonction de liaisons nouvelles;*

2° *Théorème de M. Painlevé relatif aux systèmes conservatifs formés de points matériels soumis à une pesanteur commune et à des forces mutuelles et qui, partant d'une position initiale avec une force vive nulle, reprennent à une nouvelle époque leur configuration initiale; montrer qu'un tel système reprend avec sa configuration initiale son orientation initiale.*

II. Problèmes. — 1° *Soient* α, β, γ *trois nombres positifs : Si les composantes* X, Y, Z *de la force appliquée à un point matériel* M *sont liées aux coordonnées* x, y, z *de ce point par les relations*

$$X = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad Y = \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad Z = \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

et si la fonction φ *est maxima au point* M_0 *de coordonnées*

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0,$$

le point M_0 *est position d'équilibre stable;*

2° *Deux points matériels* M *et* M′ *mobiles dans un plan et de coordonnées respectives* (x, y) *et* (x', y') *sont soumis à des forces respectives* $F\left\{\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right.$ *et* $F'\left\{\begin{matrix} X' \\ Y' \end{matrix}\right.$ *dont les composantes sont ainsi définies*

$$X = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad X' = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x'},$$

$$Y = \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad Y' = \mu \frac{\partial \psi}{\partial y'},$$

$\alpha, \beta, \lambda, \mu$ *tous positifs, mais non proportionnels; au moyen des deux fonctions* φ *et* ψ *qui sont*

$$\varphi = -A(x - x_0)^2 - 2B(x - x_0)(y - y_0) - C(y - y_0)^2,$$
$$\psi = -A'(x' - x_1)^2 - 2B'(x' - x_1)(y' - y_1) - C'(y' - y_1)^2,$$

sous les conditions A, A', C, C' *positifs et* $AC - B^2$ *et* $A'C' - B'^2$ *positifs.*

Les deux points étant indépendants et chacun libre sont en équilibre stable sur les positions respectives, de coordonnées x_0, y_0 et x_1, y_1.

Ceci posé, on assujettit les deux points aux liaisons

$$x' - x = x_1 - x_0,$$
$$y' - y = y_1 - y_0,$$

étudier le mouvement du nouveau système, et, en particulier, faire voir que A, A', C *et* C' *étant convenablement choisis, l'on pourra limiter le rapport des coefficients* B *et* B' *de manière que la position évidente d'équilibre du nouveau système, savoir :*

$$x = x_0, \qquad x' = x_1,$$
$$y = y_0, \qquad y' = y_1,$$

puisse être une position d'équilibre instable du système modifié.

On aura ainsi constitué un système non conservatif sur lequel un renforcement des liaisons peut détruire la stabilité de l'équilibre.

Épreuve pratique. — *Un demi-cercle tourne autour de son diamètre dans un fluide qui en chaque élément*

exerce une pression normale proportionnelle au carré de la vitesse. Centre de pression? (Novembre 1910).

Épreuve théorique. — I. Problème. — *Deux points mobiles* M_1 *et* M_2 *sont assujettis à décrire respectivement, dans un même plan, deux cercles concentriques, dans le même sens, avec une même vitesse linéaire; on suppose les rayons* R_1 *et* R_2 *de ces deux cercles vérifiant la relation* $R_2 = 2R_1$ *et l'on demande :*

1° *Déterminer la grandeur et la direction de la vitesse du point géométrique dont* M_1 *et* M_2 *sont les extrémités;*

2° *En supposant que les points* M_1 *et* M_2 *portent chacun une masse* pesante *de même valeur et que le plan commun des deux cercles soit vertical, étudier les positions d'équilibre du système et, dans le cas d'un équilibre stable, déterminer la durée de la* petite oscillation *correspondante du système.*

Discussion.

II. Question de cours. — *Théorème de Gauss sur l'attraction newtonienne; son application aux déterminations du potentiel et de l'attraction d'une sphère pleine homogène.*

Épreuve pratique. — *Une épicycloïde engendrée par un point d'un cercle de rayon r roulant extérieurement sur un cercle de rayon* R *est placée dans un plan vertical de manière que son sommet soit le point le plus bas de la courbe. Un point pesant se meut sur la courbe sans frottement; calculer la durée d'une* petite oscillation *autour de la position d'équilibre.* (Novembre 1911.)

Bordeaux.

Épreuve théorique. — I. *Établir les équations de Lagrange pour le mouvement d'un système à liaisons sans frottements dépendant d'un nombre fini de paramètres indépendants.*

II. *Un solide* S *est formé de deux sphères homogènes réunies par une tige suivant la ligne des centres. Le*

solide S *repose sur un plan horizontal fixe parfaitement poli et la tige est assujettie à s'appuyer sans frottements sur une verticale fixe.*

Mouvement du solide.

Épreuve pratique. — *Les deux axes* Ox, Oz *sont horizontaux et rectangulaires. L'axe* Oy *est perpendiculaire à* Oz *et fait avec* Ox *l'angle* $\frac{\pi}{6}$. *On trace dans le plan* xOy *l'ellipse ayant pour équation*

$$x^2 + y^2 = 1$$

et l'on considère la partie au-dessous de Ox *comme une plaque matérielle homogène.*

Trouver le rapport des durées des oscillations infiniment petites de ce solide pesant pouvant librement tourner soit autour de Ox *soit autour de* Oz.

(Novembre 1910).

Épreuve théorique. — I. *Définition des liaisons sans frottement.*

Énoncé et démonstration du principe des travaux virtuels.

II. *Mouvement d'un disque circulaire homogène pesant, infiniment mince dont le plan est assujetti à être vertical et qui ne peut que rouler sur un plan horizontal fixe.*

Épreuve pratique. — *Un hémisphère homogène pesant, de rayon* R, *est suspendu par l'extrémité* O *de son axe de révolution.*

Il y a une infinité de façons de le mettre en mouvement à partir de la position initiale $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ *de telle sorte que l'axe* Oz *décrive un cône de révolution. Trouver, pour tous ces mouvements, le maximum du rapport des vitesses initiales de rotation du solide autour de* Oz *et de rotation du plan* zOz_1, *autour de la verticale descendante* Oz_1.

(Novembre 1911).

Caen.

Épreuve théorique. — *Un triangle rectangle isoscèle, homogène et pesant, a le milieu de son hypoténuse,* I, *fixe; cette hypoténuse est assujettie à demeurer dans un plan horizontal,* P, *passant par* I. *Le sommet,* C, *de l'angle droit est attiré par un point fixe,* O, *du plan* P *proportionnellement à la distance.*

1° *Établir les équations générales du mouvement de la plaque, les conditions initiales étant quelconques.*

2° *Ramener aux quadratures dans le cas particulier suivant : le point* O *est au point* I. *Au début du mouvement, le plan de la plaque est vertical, et la plaque est animée d'une rotation égale à* $\omega\sqrt{2}$ *autour d'un axe passant par* I, *situé dans son plan, et incliné à* 45° *sur l'horizon. Étudier qualitativement le mouvement.*

On désigne par $2a$ *l'hypoténuse du triangle, par* R *la valeur de la force attractive à l'unité de distance. La densité superficielle du triangle est prise pour unité.*

Épreuve pratique. — *Un fil métallique de longueur* l *est fixé en un point* A, *et passe sur une poulie très petite,* B, *située dans le plan horizontal du point* A. *Le fil est supposé très flexible. A son extrémité libre est attaché un poids* P. *Déterminer la position d'équilibre au fil en négligeant sa raideur.*

Données numériques :

$$AB = 135^{\text{cm}} = 2a,$$
$$l = 150^{\text{cm}},$$
$$P = 10^{\text{kg}}.$$

Le fil est cylindrique; il a un diamètre de 2^{mm}, *et une densité de* 7,7.

On pourra procéder graphiquement pour la résolution de l'équation transcendante du problème, et faire toutes les approximations qui paraîtront légitimes.

(Novembre 1911).

Épreuve théorique. — I. *Deux demi-cercles égaux* C *et* C' *sont mobiles dans un même plan vertical autour d'un*

même point A, *qui est l'une des extrémités, du diamètre limitant chacun d'eux. Ces demi-cercles sont supposés pleins, homogènes, pesants, et de même densité. L'un d'eux est librement suspendu et occupe sa position d'équilibre* C. *L'autre,* C', *est maintenu de façon que le diamètre par lequel il se trouve limité soit horizontal, et il est situé au-dessus de ce diamètre horizontal.*

On abandonne sans vitesse le disque C', *dont le diamètre vient choquer celui du disque* C.

1° *Déterminer le temps au bout duquel se produit le choc;*

2° *Étudier le mouvement qui suit le choc dans les deux hypothèses suivantes : a. Les disques sont infiniment mous et restent en contact après le choc; b. Ils sont parfaitement élastiques : déterminer en ce cas l'époque de la seconde rencontre des deux disques;*

3° *Calculer la réaction du point* A.

II. *Un point matériel pesant, de masse m, est posé à l'intérieur d'un cerceau fixe dans un plan vertical; il est en équilibre au point le plus bas du cerceau.*

On imprime au cerceau un mouvement de rotation autour de son axe (c'est-à-dire autour de la perpendiculaire à son plan menée par son centre), la vitesse angulaire étant constante et égale à ω. *En supposant qu'il y ait un frottement de coefficient* $f = \operatorname{tang} \varphi$ *entre le point matériel et le cerceau, étudier les conditions d'équilibre relatif du point sur le cerceau. Discuter complètement.*

Épreuve pratique. — *On donne une plaque rectangulaire homogène de dimensions* 10^{cm} *et* 20^{cm}. *On considère un point* O *situé sur la perpendiculaire au plan de la plaque menée par un de ses sommets à une distance de* 8^{cm} *de celui-ci.*

Déterminer, parmi les droites passant par O, *celle par rapport à laquelle le moment d'inertie de la plaque est maximum.* (Juin 1911).

Montpellier.

Épreuve théorique. — I. *Vitesse et accélération dans le mouvement relatif.*

II. *Un point matériel pesant glisse sans frottement sur la surface d'une sphère dont il peut se séparer. Cette sphère est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical fixe passant par son centre. Étudier le mouvement relatif du point sur la sphère, en supposant qu'à l'époque initiale le mobile soit placé sur le grand cercle horizontal de la sphère et que sa vitesse initiale soit nulle; en particulier, reconnaître si le mobile abandonne la sphère.*

Epreuve pratique. — *Mesurer, à l'aide du pendule balistique, la vitesse d'une balle de revolver à sa sortie du canon.*

Le pendule est construit de façon que l'axe n'éprouve aucune percussion au moment du choc.

Données numériques :

Masse du pendule........................	5^{kg}
Masse de la balle........................	20^{g}
Distance du centre de gravité du pendule à l'axe de suspension.....................	1^{m}
Distance au même axe de la ligne de tir....	2^{m}
Angle maximum d'écart....................	90°
Accélération due à la pesanteur............	$9^{m},81$

Nancy.

Soit AB *une barre pesante de longueur l dont la densité croît de* A *en* B *de façon que, si ε_0 est cette densité en* A, *en un point quelconque à distance ρ de* A *la densité soit égale à*

$$\varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0 \rho^2}{l^2}.$$

La barre AB *peut rouler sans glisser sur la circonférence d'un cercle vertical fixe, de centre* O, *de rayon a.*

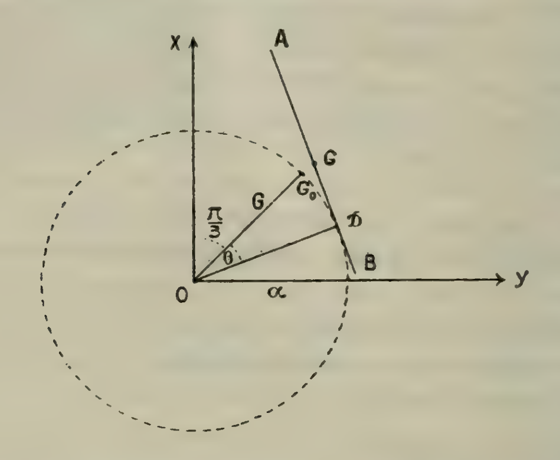
1° *Quelles sont les positions d'équilibre de la barre?*

2° *Supposons qu'à l'instant initial le point de contact de la barre et du cercle soit le centre de gravité* G_0 *de la barre et que la barre se meuve autour de* G_0 *avec une vitesse angulaire initiale de rotation égale à*

$$k\frac{\sqrt{ag}}{l},$$

où k est une constante positive et g la constante de la gravité.

On demande d'écrire l'équation différentielle du mouvement de la barre en appliquant la méthode de Lagrange.



Si D *est le point de contact de la barre à l'instant quelconque t, on prendra pour paramètre définissant la position de la barre à cet instant l'angle*

$$\theta = \widehat{OG_0, OD},$$

et l'on supposera que

$$\widehat{OX, OG_0} = \frac{\pi}{3}.$$

3° *On demande d'écrire l'équation différentielle du mouvement de la barre en appliquant le théorème de l'énergie cinétique;*

4° *On demande de discuter le mouvement pour chaque valeur positive donnée à k. La barre peut-elle prendre une position verticale?*

5° *On demande de calculer la pression que la barre exerce sur le cercle.* (Juin 1909.)

Épreuve théorique. — *Une barre homogène pesante* AB, *de longueur 2a, est assujettie à se mouvoir de façon que l'une de ses extrémités* A *reste dans un plan horizontal fixe donné* $O\xi\eta$, *tandis que l'autre extrémité* B *ne quitte pas une droite verticale fixe donnée* $O\zeta$. *Chaque élément*

de la barre AB *est repoussé par le point* O *proportionnellement à sa distance au point* O.

On donne la position initiale et l'état initial des vitesses de la barre; on demande d'étudier le mouvement de cette barre.

Épreuve pratique. — *Une plaque rectangulaire* ABCD *de côtés* $AB = 3^{dm}$, $AD = 2^{dm}$, *d'épaisseur négligeable et de densité superficielle* 3 *est chargée de deux secteurs circulaires de rayon égal à* 1^{dm}, *d'angle égal à* $\frac{\pi}{2}$, *et de densité* 4; *l'un a pour centre le sommet* C *et est placé dans l'angle* BCD, *l'autre a pour centre le sommet* D *et est placé dans l'angle* ADC.

Cette plaque est suspendue par son côté AB *supposé horizontal, autour duquel elle peut tourner librement; à l'instant initial, la plaque est horizontale et elle est abandonnée sans vitesse initiale à l'action de son poids. Trouver la durée de ses oscillations dans le vide, à* $\frac{1}{10}$ *de seconde près.* (Octobre 1909.)

Poitiers.

Épreuve théorique. — I. *Démontrer que l'attraction newtonienne d'une sphère homogène sur un corps est la même que si toute la masse de la sphère était concentrée en son centre.*

Attraction réciproque de deux sphères.

II. *Trois sphères homogènes* s_1, s_2, s_3 *de centres* c_1, c_2, c_3 *et de masses* m_1, m_2, m_3 *s'attirent suivant la loi de l'attraction universelle.*

1° *Trouver le mouvement de chaque sphère autour de son centre. Écrire les équations différentielles qui définissent les mouvements des points* c_1, c_2, c_3 *et les intégrales de ces équations que fournissent les théorèmes généraux de la Mécanique;*

2° *Démontrer que, quelles que soient les conditions initiales, il ne peut y avoir plus d'un des trois points* c_1, c_2, c_3 *qui reste au repos.*

Prouver que c_1 *ne peut rester au repos que si* $m_2 = m_3$ *et si les deux points* c_2 *et* c_3 *sont symétriques par rapport*

à c_1. *Quand il en est ainsi à un instant, quelles doivent être les vitesses de* c_1, c_2, c_3 *à cet instant, pour que* c_1 *reste immobile? Quels sont alors les mouvements de* c_2 *et* c_3?

3° *Quels sont les mouvements du système dans lesquels le mouvement de* c_1 *est rectiligne et uniforme?*

Épreuve pratique. — I. *Un tétraèdre régulier homogène de densité* 2,7 *et dont l'arête est de* $1^m,05$ *oscille librement autour d'une de ses arêtes fixée dans une position telle qu'elle fait un angle de* 45° *avec l'horizon. Calculer la durée des petites oscillations* ($g = 980$ C. G. S.).

II. *On considère une figure plane mobile dans son plan et l'on suppose qu'à un instant les deux roulettes fixe et mobile sont symétriques l'une de l'autre par rapport à leur tangente commune au centre instantané de rotation.*

1° *Démontrer que la même propriété a lieu à tout instant;*

2° *En supposant que les roulettes soient des paraboles, déterminer la trajectoire du foyer de la roulette mobile;*

3° *Pour une position de la figure, on donne la vitesse de ce foyer; en déduire la vitesse d'un point quelconque de la figure et la vitesse avec laquelle le centre instantané de rotation se déplace, à l'instant considéré, sur les deux roulettes.* (Juillet 1908.)

Épreuve théorique. — *Un tétraèdre régulier, homogène, pesant* ABCD, *est suspendu par son sommet* A; *son sommet* B *glisse sans frottement sur un plan horizontal fixe* H *placé au-dessous de* A *à une distance telle que* AB *fasse* 45° *avec l'horizon.*

Étudier le mouvement de ce tétraèdre sachant qu'il part à l'instant 0 *de sa position d'équilibre instable avec des vitesses données.*

Calculer la durée qui s'écoule entre l'instant initial et le moment où l'une des arêtes du tétraèdre vient choquer le plan H. *Que devient cette durée si l'on considère des vitesses initiales de plus en plus faibles?*

Épreuve pratique. — I. *Une figure plane* F *mobile dans son plan a un mouvement tel que l'un* A *de ses points décrit la courbe dont l'équation en coordonnées polaires*

est $\rho = e^{\omega}$. *Une droite* D *de* F *contenant* A *passe constamment par l'origine* O *des coordonnées polaires.*

Trouver la base et la roulette de ce mouvement.

II. *Un corps solide pesant repose par une face plane sur un plan incliné de* 15° *sur l'horizon. On lance le corps vers le bas le long de la ligne de plus grande pente avec une vitesse de* 3ᵐ *à la minute. Le corps s'arrête après avoir glissé pendant* 10ᵐ; *quel est le coefficient de frottement du corps sur le plan?*

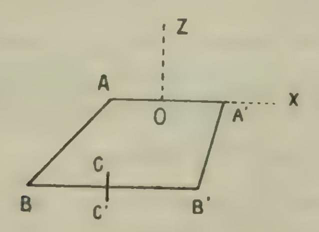
(*Accélération de la pesanteur* = 980 C.G.S.)

(Novembre 1908.)

Épreuve théorique. — 1° *Deux sphères homogènes pesantes roulent sans glisser sur un plan horizontal parfaitement rugueux. Elles sont parfaitement polies et glissent sans frottement l'une sur l'autre lorsqu'elles se trouvent en contact. On demande d'étudier le mouvement du système pour des conditions initiales quelconques, et de calculer les réactions.*

2° *Que deviendrait le problème précédent si les deux sphères étaient rugueuses et roulaient sans glisser l'une sur l'autre?*

Épreuve pratique. — *Soient* $Oxyz$ *trois axes rectangulaires* (Oz *vertical*). *On donne un trapèze constitué par une barre homogène sans épaisseur, dont les extrémités* B, B′ *sont soutenues par deux cordes homogènes*



égales, suspendues elles-mêmes aux points A, A′ *de coordonnées*

$$x = \pm a, \qquad y = z = 0.$$

La barre BB′ *étant amenée à une hauteur donnée (dans une position parallèle à* AA′ *et symétrique par rapport au plan* Oxy), *les cordes supposées tendues, on suspend au*

trapèze un gymnaste CC′ *dont le centre de gravité est placé au milieu de* BB′ (*le gymnaste est représenté par une droite* CC′ *homogène, sans épaisseur, et de longueur donnée, sa position initiale est verticale*)

Le trapèze est lâché sans vitesse. Au bout d'un temps τ, *le gymnaste lâche le trapèze et, emporté par la vitesse acquise, il tombe librement. On demande à quelle distance et à quel moment le gymnaste atteint le sol. Discussion d'après la hauteur initiale de* BB′ *et la valeur de* τ.

On admet que la résistance de l'air est dirigée en sens inverse de la vitesse et proportionnelle au produit de la masse par la vitesse (*le coefficient de proportionnalité est très petit*). (Juillet 1909.)

Épreuve théorique. — 1° *Un point pesant* A *est assujetti à se déplacer sans frottement sur une courbe rigide* C. *Déterminer quelle doit être la forme de la courbe* C *pour que la projection du point* A *sur l'axe vertical* O*z* *soit animé d'un mouvement uniforme de vitesse* a;

2° *Un point matériel* M *décrit, sous l'influence d'une force centrale* F, *une trajectoire dont l'hodographe est une circonférence. Chercher l'expression de l'intensité de la force* F *supposée fonction de la seule distance du point* M *au centre* O *des forces.*

Épreuve pratique. — *Un point matériel* M *de masse* m *est attiré par un centre fixe* O, *l'intensité de la force attractive étant* $\frac{km}{z^2}$, *où* k *est une constante et* $z =$ OM. *A l'instant initial, la vitesse* v_0 *est perpendiculaire au rayon vecteur* r_0. *Calculer les éléments de la trajectoire et déterminer la position du mobile au bout d'un intervalle de temps* t *après l'époque initiale.*

Application numérique : $k = 27 \times 10^9$ C.G.S.; $v_0 = 3^{\text{m}}$ *par seconde,* $r_0 = 1^{\text{km}}$; $t = 1$ *heure.* (Novembre 1909.)

Rennes.

Composition écrite. — I. *Établir les équations d'équilibre d'un fil flexible et inextensible.*

II. *On considère un fil flexible et inextensible dont chaque élément* ds *est soumis à l'action d'une force paral-*

lèle à une direction fixe. Démontrer que la courbe d'équilibre est plane.

En supposant cette courbe située dans le plan xOy, la force parallèle à Oy et représentée par $\gamma\,ds$, montrer que l'on a

$$Y = \frac{c}{\rho\cos^2\alpha},$$

c désignant une constante, ρ le rayon de courbure, et α l'angle de la tangente avec Ox.

Quelle doit être la courbure d'équilibre pour que la force γ soit inversement proportionnelle à la portion de la normale MP *comprise entre le point d'incidence* M *et le point de rencontre* P *avec l'axe* Oy?

Épreuve pratique. — *Une corde parfaitement flexible et inextensible est enroulée suivant la section droite d'un cylindre convexe à génératrices horizontales. Le coefficient de frottement est égal à $\frac{1}{2}$. L'une des extrémités,* A, *supporte un poids de* 500^{kg}; *l'autre,* B, *est soumise à une tension de* 10^{kg}.

Trouver l'angle d'enroulement minimum nécessaire pour que l'équilibre existe.

Cet angle étant donné, ainsi que la charge en A, *entre quelles limites pourra varier la tension en* B *sans que l'équilibre soit rompu?* (Novembre 1909.)

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Alger.

Épreuve théorique. — Question de cours. — *Intégration des différentielles totales.*

Problème. — 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$(qy - px)(x^2 - y^2) + 2r(x^2 + y^2) = 0;$$

2° *Déterminer la fonction arbitraire d'intégration, de manière que les caractéristiques forment une famille de lignes asymptotiques de la surface. Donner dans ce cas la seconde famille des lignes asymptotiques;*

3° *Les surfaces ainsi définies dépendent encore d'une constante arbitraire k. Déterminer les trajectoires orthogonales de cette famille de surfaces (on se bornera à la projection sur le plan des xy).*

Épreuve pratique. — *On donne l'équation différentielle de Riccati*

$$\frac{dy}{dx} = a - \frac{2}{e^x - e^{-x}} + (e^x + e^{-x})\left(\frac{1}{e^x - e^{-x}} - a\right)y + ay^2,$$

a étant une fonction donnée de x:

1° *Démontrer qu'elle admet deux solutions y_1, y_2 dont le produit est +1. Les déterminer:*

2° *Ramener à une quadrature l'intégration de l'équation;*

3° *Intégrer complètement dans le cas où*

$$a = \frac{3x^2 - 1}{x(x^2-1)(e^x - e^{-x})}.$$

(Juin 1912.)

Besançon.

Épreuve théorique. — Première question. — 1° *Étant donnée l'équation différentielle*

$$(1) \qquad x^5y'^2 - 3x^4yy' + 2x^3y^2 + y^4 = 0,$$

la substitution $y = uz$, u et z étant deux fonctions de x, la transforme en une équation de même forme en z. Déterminer u de façon à faire disparaître le terme en z^2;

2° *Intégrer l'équation en z ainsi obtenue $\left(\text{on pourra prendre } \frac{1}{z} \text{ comme inconnue}\right)$;*

3° *Trouver l'enveloppe des solutions de l'équation* (1); *voir s'il y a une intégrale singulière;*

4° *Distinguer les points du plan par lesquels passent des intégrales réelles.*

Deuxième question. — *L'équation*

$$(z-3)^2u^2-2(z-1)u+1=0$$

définit une fonction $u(z)$ *à deux déterminations :*

1° *Quels sont les points singuliers de la fonction* u?

2° *Développer* u *en série au voisinage de ces points singuliers. On se bornera à trouver les quatre premiers termes des séries;*

4° *Choisissant la détermination qui se réduit pour* $z=4$ *à* $3+\sqrt{2}$, *indiquer sommairement sa variation lorsque* z *parcourt le cercle de centre* O *et de rayon* 4. *Calculer* $\int u\,dz$ *le long de ce cercle.*

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation*

$$y^{(\text{IV})}-y'''-7y''+13y'-6y=\sin 2x+(x^2-1)e^x+e^{-x}.$$

Déterminer toutes les intégrales qui passent au point $x=0$, $y=1$ *et qui admettent en ce point l'axe* Oy *comme tangente inflexionnelle.* (Juin 1912.)

Épreuve théorique. — Première question. — *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles*

$$p(x^2-y^2-z^2)+2qxy-2x(z+1)=0.$$

1° *Déterminer l'intégrale générale ;*

2° *Trouver la surface intégrale qui passe par le cercle* $y=1$, $x^2+z^2=1$;

3° *Trouver le lieu des centres de courbure principaux de cette surface relatifs aux points de ce cercle.*

Deuxième question. — *Déterminer une courbe gauche telle que les segments interceptés sur la tangente, à partir du point de contact par les plans* $x=0$, $y=0$, *aient respectivement des longueurs données* a *et* b.

Dans quels cas la courbe obtenue est-elle algébrique? Examiner le cas particulier $a=b$.

Épreuve pratique. — *Intégrer le système d'équations*

différentielles du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} + x - y = t - 2,$$

$$\frac{dy}{dt} + y - 4z = e^t,$$

$$\frac{dz}{dt} + 4z - x = e^{-3t}.$$

(Novembre 1912.)

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Déterminer les lignes asymptotiques* C, *autres que les génératrices rectilignes, de la surface réglée*

$$x = \mathrm{U}v, \qquad y = (a\mathrm{U} + b)v, \qquad z = u + v,$$

U *étant une fonction de* u, a *et* b *deux constantes.*

Déterminer, de la façon la plus générale, la fonction U *de façon qu'il y ait une courbe* C, *autre que l'axe* Oz, *qui soit plane. Quelles sont alors les courbes* C *et la surface* S?

II. *Former, en appliquant la méthode générale, une fonction* $f(z)$ *de la variable complexe* z, *uniforme dans tout le plan et admettant comme pôles simples toutes les valeurs réelles entières positives et négatives, le résidu relatif au pôle* n *devant être* n^p (*p est un entier positif donné*). *Comparer la fonction obtenue à la fonction*

$$\pi z^p \cot \pi z.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne en coordonnées rectangulaires la sphère et le cylindre*

(1) $$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2.$$

(2) $$x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

Calculer :

1° *Le volume du cylindre intérieur à la sphère;*

2° *L'aire de la surface qui limite ce volume.*

(Novembre 1911.)

Caen.

Épreuve théorique. — I. *Soient* OX, OY, OZ *trois axes rectangulaires*; M *un point quelconque d'une surface*; A, B, C *les points d'intersection respectifs du plan tangent en* M *avec trois axes.*

On propose de déterminer la surface par la double condition : 1° que, pour tout point M *pris sur elle, la somme algébrique des trois segments* $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ *soit égale à zéro; 2° que la surface contienne la parabole*

$$x = 1,$$
$$(z - y)^2 - 4y = 0.$$

II. 1° *Trajectoires orthogonales des génératrices de la surface réglée définie en coordonnées rectangulaires par les formules*

$$x = (u + v)\cos u - f(u)\sin u,$$
$$y = (u + v)\sin u + f(u)\cos u,$$
$$z = uv,$$

où u, v *désignent deux paramètres arbitraires et* $f(u)$ *une fonction donnée de* u. *Ramener cette recherche à une quadrature.*

2° *Déterminer la fonction* $f(u)$ *par la condition que la surface soit développable.*

Épreuve pratique. — *Construire l'une des courbes définies en coordonnées rectangulaires par l'équation différentielle*

$$a\,dx + \sqrt{y^2 - a^2}\,dy = 0,$$

où a *désigne une longueur constante donnée. Faire voir que la courbe possède un arc de symétrie.*

(Juin 1912.)

Épreuve théorique. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ, *on considère la surface développable, enveloppe du plan mobile,*

$$2z - 2ux + u^2y - 2f(u) = 0,$$

où u désigne un paramètre arbitraire, et f(u) une fonction donnée de ce paramètre.

Faire voir que l'arête de rebroussement de la surface est une hélice.

Déterminer les trajectoires orthogonales des génératrices, et faire voir que ces trajectoires sont des lignes planes.

Former l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle satisfont les surfaces développables qui correspondent à tous les choix possibles de la fonction f(u) dans l'équation du plan mobile, et déterminer celles d'entre ces surfaces qui contiennent la courbe

$$x = 0,$$
$$3z + 2y^3 = 0.$$

Épreuve pratique. — *On considère, dans le plan de notation graphique de la variable imaginaire $z = x + iy$, une ellipse dont le centre a pour coordonnées*

$$x = 1, \qquad y = 0,$$

le petit axe étant dirigé suivant Ox, le grand parallèle à Oy, et le grand axe double du petit : quelle est la plus grande longueur que l'on puisse donner au demi-petit axe pour que, dans la région intérieure à l'ellipse, l'expression $(1 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ soit assimilable à quelque fonction uniforme, et combien existe-t-il de semblables fonctions?

En désignant par $\varphi(z)$ celle de ces fonctions qui, pour $z = 0$, prend la valeur numérique $+1$, on examinera comment varie $\varphi(z)$ sur les portions des axes Ox, Oy intérieures à l'ellipse maximum.

On posera ensuite

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 4z^2)^2 [1 + 2z^2 - \varphi(z)]},$$

et, la variable z étant assujettie à se mouvoir à l'intérieur de l'ellipse maximum, on déterminera dans cette région les pôles $H(z)$ avec les groupes correspondants des fractions simples.

On considérera enfin l'ellipse homothétique et concen-

trique dont le demi-petit axe a pour longueur $\frac{11}{10}$, *et, désignant par* A *un point fixe situé sur le contour de cette dernière, on évaluera la variation numérique subie par une détermination quelconque de l'intégrale indéfinie* $\int H(z)\,dz$ *quand la variable* z *décrit le contour de* A *en* A *dans le sens direct.* (Juin 1913.)

Clermont-Ferrand.

Épreuve théorique. — *Trouver les trajectoires orthogonales des plans osculateurs d'une hélice tracée sur un cylindre de révolution. Rayons de courbure et de torsion de ces trajectoires.*

Épreuve pratique. — *Déterminer les surfaces qui satisfont à la condition* $\mathrm{OP}.\mathrm{MN} = \lambda.\overline{\mathrm{OM}}^2$, λ *étant une constante,* M *un point de la surface,* N *le pied de la normale en* M, P *la projection de l'origine* O *sur le plan tangent en* M. (Juin 1912.)

Épreuve théorique. — *Soient*

$$(1) \qquad y'' + py' + qy = 0$$

une équation linéaire du second ordre, et

$$(2) \qquad z'' + z'^2 + pz' + q = 0$$

sa transformée, en posant $y = e^z$. *On demande la condition pour que cette transformée* (2) *admette deux solutions* z_1, z_2 *liées par la relation*

$$z_2 = az_1,$$

a étant une constante. Cette condition étant remplie, en déduire l'intégrale générale de l'équation (1) *et celle de l'équation* (2).

Cas particulier où $a = -1$, $p = -\frac{1}{x}$.

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation*

$$xy^2y'^2 - y^3y' + a^2x = 0,$$

en posant $y^2 = u$;

$$x u'^2 - 2u' + 4a^2 x = 0.$$

(Juin 1913.)

Grenoble.

Épreuve théorique. — *Lignes de niveau, lignes de pente, lignes asymptotiques de la surface définie en coordonnées cylindriques par l'équation*

$$z = ar^m \sin m\psi.$$

Étudier le cas particulier où $m = -2$, *d'abord en partant des résultats généraux obtenus pour une valeur quelconque de* m; *et ensuite en partant de l'équation en coordonnées ponctuelles* x, y, z *de la surface, lorsque* $m = -2$.

Épreuve pratique. — I. *Volume limité par les surfaces*

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^3}{a^3}, \qquad \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

et par le plan mené parallèlement à $y\mathrm{O}z$ *par les points de rencontre des traces des deux surfaces sur le plan* $x\mathrm{O}y$.

II. *Intégrer l'équation*

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} - 4xy^2 - 2x(4x^2+3)y - 4x^3(x^2+1) = 0.$$

(Juillet 1911.)

Épreuve théorique. — *Étant donnée l'équation*

$$(px+qy)^2 - 2a(py-qx) - a^2 = 0,$$

on demande :

1° *Une solution complète de cette équation;*

2° *La nature des sections faites dans la surface que représente cette solution quand on coupe la surface par des plans parallèles à* $x\mathrm{O}y$;

3° *Les lignes asymptotiques de la même surface.*

Épreuve pratique. — *Solution singulière de l'équation*

$$9(1+y)y^2y'^2 = 4(1-3y)$$

déduite : 1° de cette équation différentielle; 2° de son intégrale générale.

Lieux des points de rebroussement et des points d'inflexion des courbes intégrales.

(Novembre 1911.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2137.

(1909, p. 384.)

En désignant par p un nombre premier, par a et b deux nombres premiers entre eux, le quotient de la division de $a^p - b^p$ *par* $a - b$ *a tous ses diviseurs premiers de la forme* $P = kp + 1$, *à l'exception du diviseur p qu'il admet dans l'hypothèse* $a - b =$ *mult. p, dans cette hypothèse seulement, et qu'il admet alors une seule fois* (¹).

(G. F.)

2ᵉ Solution,

Par l'auteur.

Soit

$$a^p - b^p = (a - b) \times Q,$$
$$Q = a^{p-1} + a^{p-2}b + \ldots + b^{p-1}.$$

Un diviseur premier de $a^p - b^p$ divise $a - b$, ou Q, ou les deux. Quels facteurs premiers peuvent diviser à la fois $a - b$ et Q? Si l'on a

$$a - b = \text{mult. P}, \qquad a = \text{mult. P} + b,$$

on aura

$$Q = \text{mult. P} + pb^{p-1};$$

P ne pourra être que p.

Ainsi les diviseurs premiers de Q autres que p sont les diviseurs premiers de $a^p - b^p$ *qui ne divisent pas* $a - b$; soit P un tel diviseur premier.

(¹) Cette dernière partie de l'énoncé est en défaut pour $p = 2$.

Les valeurs de n pour lesquelles $a^n - b^n$ est multiple de P sont les multiples de la plus petite d'entre elles; comme $a^p - b^p$ est multiple de P, sans que $a - b$ le soit, pour la plus petite valeur de n; et comme $a^{p-1} - b^{p-1}$ est multiple de P d'après le théorème de Fermat, on a

$$P - 1 = \text{mult.}\, p.$$

C. Q. F. D.

Cherchons maintenant à quelle condition le quotient Q admet le diviseur p. Si l'on pose $a = b + h$, il vient

$$Q = \frac{(b+h)^p - b^p}{h}$$
$$= pb^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} b^{p-2}h + \ldots + pbh^{p-2} + h^{p-1}.$$

Tous les termes du développement, sauf le dernier, ont des coefficients divisibles par p; pour que Q admette le facteur p, il faut et il suffit que h, c'est-à-dire $a - b$, soit divisible par p. On a alors

$$\frac{Q}{p} = b^{p-1} + \ldots + bh^{p-2} + \frac{h}{p} h^{p-1}.$$

Si l'on n'excepte pas le cas $p = 2$, on a

$$\frac{Q}{p} = \text{mult.}\, p + b^{p-1};$$

le quotient $\frac{Q}{p}$ n'admet donc plus le facteur p.

(Je rappelle que je suis arrivé au cas particulier $p = 3$ par des considérations différentes, qu'il semble difficile d'étendre au cas général.)

[O'7a]

SUR LES SYSTÈMES CONJUGUÉS;

PAR M. V. JAMET.

Les articles de M. Turrière (août 1912, avril 1913) suggèrent l'idée de traiter le problème suivant : *Trouver une surface sur laquelle il y ait un réseau conjugué se projetant sur un plan suivant un réseau donné.*

Soient, dans ce plan,

$$x = f(\alpha, \beta),$$
$$y = \varphi(\alpha, \beta)$$

les équations représentatives des courbes du réseau donné; il est toujours possible de former l'équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} + A \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + B \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0,$$

à laquelle satisfont les fonctions x, y, et toute autre intégrale z de cette équation est la cote z du point courant sur la surface cherchée, exprimée en fonction de α et de β. (DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Livre I, Chap. IX, p. 84.)

Par exemple, si le réseau donné est formé de deux systèmes de coniques homofocales, l'équation différentielle ci-dessus est

$$(\alpha - \beta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0;$$

elle appartient à une catégorie d'équations sur laquelle

on trouvera dans l'Ouvrage précité (Livre III, Chap. IV) les plus précieux renseignements.

Mais il est des cas où l'emploi des coordonnées homogènes facilite singulièrement la solution, si l'on se rappelle le théorème de M. Darboux (*loc. cit.*, Livre III, Chap. IX, p. 98), d'après lequel un réseau conjugué est déterminé par tout système de quatre intégrales d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} + A \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + B \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + C\theta = 0,$$

ces quatre intégrales étant les coordonnées homogènes (ponctuelles ou tangentielles) d'un point mobile sur la surface.

Pour en faire une application, nous supposerons que le réseau donné est formé par les cercles passant par deux points fixes et par ceux qui les coupent à angle droit. En les rapportant à deux axes de coordonnées dont le choix est tout indiqué, on trouvera, pour l'équation d'un des faisceaux de cercles,

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + a^2 = 0$$

et, pour l'équation de l'autre faisceau,

$$x^2 + y^2 - 2\beta y - a^2 = 0.$$

En résolvant ces équations par rapport à x et à y, on trouve

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha(a^2 + \beta^2) + \beta\sqrt{(a^2 + \beta^2)(\alpha^2 - a^2)}}{\alpha^2 + \beta^2}, \\[2ex] y = \dfrac{\beta(\alpha^2 - a^2) + \alpha\sqrt{(a^2 + \beta^2)(\alpha^2 - a^2)}}{\alpha^2 + \beta^2}, \end{cases}$$

et deux autres formules qui ne diffèrent de celles-ci que par le signe du radical. On les transforme comme

il suit :

$$x = \sqrt{a^2+\beta^2}\,\frac{\alpha\sqrt{a^2+\beta^2}+\beta\sqrt{\alpha^2-a^2}}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$= \sqrt{a^2+\beta^2}\,\frac{\alpha^2}{\alpha\sqrt{a^2+\beta^2}-\beta\sqrt{\alpha^2-a^2}} = \frac{\dfrac{a^2}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}}{\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}-\dfrac{\beta}{\sqrt{\beta^2+b^2}}},$$

et, de même,

$$y = \frac{\dfrac{a^2}{\sqrt{\beta^2+b^2}}}{\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}-\dfrac{\beta}{\sqrt{\beta^2+b^2}}};$$

de sorte qu'on peut adopter les coordonnées homogènes X, Y, U, définies par les formules

$$X = \frac{a^2}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}, \qquad Y = \frac{a^2}{\sqrt{\beta^2+b^2}},$$

$$U = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}-\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+b^2}}.$$

Ces trois fonctions vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0,$$

cas particulier de l'équation (1). Donc, on obtiendra les équations représentatives d'une des surfaces cherchées en joignant aux équations (2) l'équation suivante,

$$z = \frac{F(\alpha)+\Phi(\beta)}{\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}-\dfrac{\beta}{\sqrt{\beta^2+b^2}}}$$

ou bien

$$z = \frac{[F(\alpha)+\Phi(\beta)]\sqrt{(\alpha^2-a^2)(\beta^2+b^2)}}{\alpha\sqrt{\beta^2+b^2}-\beta\sqrt{\alpha^2-a^2}},$$

$F(\alpha)$ et $\Phi(\beta)$ désignant deux fonctions arbitraires.

[O'7a]

SUR LES RÉSEAUX CONJUGUÉS;

Par M. V. JAMET.

1. Comme suite à mon précédent article, je signalerai les surfaces sur lesquelles toutes les courbes d'un même réseau conjugué sont dans des plans tangents à un même cylindre du deuxième ordre.

On prendra pour plan des xy le plan d'une section droite, et l'on observera que toute tangente à cette section est représentée par une équation de la forme

$$Z\alpha^2 - Y\alpha + X = 0, \tag{1}$$

où α désigne une constante, X, Y, Z étant des fonctions linéaires et homogènes des trois coordonnées homogènes x, y, u. Par chaque point du plan des xy passe une droite représentée par l'équation (1) et une deuxième droite représentée par l'équation

$$Z\beta^2 - Y\beta + X = 0. \tag{2}$$

L'équation aux dérivées partielles que nous voulons former doit admettre pour intégrales les trois fonctions X, Y, Z de α et de β, ou trois fonctions qui leur soient proportionnelles, savoir

$$\alpha\beta, \quad \alpha + \beta, \quad 1;$$

et comme elle est de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} + A\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + B\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + C\theta = 0,$$

on en conclut qu'elle se réduit à

$$(3)\qquad (\alpha-\beta)\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}-\frac{\partial\theta}{\partial\beta}=0.$$

Si son intégrale générale est désignée par θ, la cote z d'un point de la surface cherchée sera égale à $\frac{\theta}{u}$.

Voici comment on obtient cette intégrale générale. D'abord on trouve, par deux différentiations successives,

$$\frac{\partial^4\theta}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}=0$$

et par conséquent

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}=f''(\alpha)+\varphi''(\beta),$$

f et φ désignant deux fonctions arbitraires. On en déduit

$$\theta=\beta f'(\alpha)+\alpha\varphi'(\beta)+f_1(\alpha)+\varphi_1(\beta),$$

f_1, φ_1 désignant deux fonctions qu'il s'agit de déterminer en tenant compte de l'équation (3). Or on trouve, en vertu de cette relation,

$$-\alpha f''(\alpha)-\beta\varphi''(\beta)+f'(\alpha)-\varphi'(\beta)-f_1'(\alpha)+\varphi_1'(\beta)=0,$$

ou bien

$$\beta\varphi''(\beta)+\varphi'(\beta)+\varphi_1'(\beta)=\alpha f''(\alpha)-f'(\alpha)+f_1'(\alpha),$$

et ceci ne peut avoir lieu que si les deux membres de cette égalité sont égaux à une même constante. Soit donc

$$\alpha f''(\alpha)-f'(\alpha)+f_1'(\alpha)=a.$$

On trouve, en intégrant,

$$\alpha f'(\alpha)-2f(\alpha)+f_1(\alpha)=a\alpha+c;$$

et de même

$$\beta\varphi'(\beta) - 2\varphi(\beta) + \varphi_1(\beta) = a\beta + c',$$

puis

$$(4) \qquad \theta = (\beta-\alpha)f'(\alpha) + 2f(\alpha) + (\alpha-\beta)\varphi'(\beta) + 2\varphi(\beta) + a(\alpha+\beta) + b,$$

b désignant la somme des deux constantes arbitraires c, c'; et le problème actuel se résout par cette dernière formule.

2. Dans l'étude des surfaces que nous venons de définir, la recherche des lignes asymptotiques se ramène aux quadratures. En effet, une telle surface est une transformée homographique de celle qu'on définirait en prenant pour coordonnées homogènes x, y, z, u d'un point courant, les fonctions

$$\alpha\beta, \quad \alpha+\beta, \quad \theta, \quad 1,$$

en désignant par θ le second membre de la formule (4); mais alors l'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$\begin{vmatrix} d^2x & d^2y & d^2z & d^2u \\ x & y & z & u \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial u}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial u}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0$$

se réduit à

$$f'''(\alpha)\,d\alpha^2 + \varphi'''(\beta)\,d\beta^2 = 0,$$

comme on le voit en faisant subir au déterminant ci-dessus toute une suite de transformations faciles. Les lecteurs désireux d'appliquer à notre problème les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques reconnaîtront que cela est possible dans le cas où l'on a, par

exemple,

$$f(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{(\alpha - t)^2}{F(t)} dt, \qquad \varphi(\beta) = -\int_{\beta_0}^{\beta} \frac{(\beta - u)^2 du}{F(u)},$$

en désignant par F un polynome du troisième ou du quatrième degré.

3. Un autre cas particulier du problème traité dans le précédent article est celui où le réseau plan donné est constitué par deux faisceaux linéaires de droites. Ce cas est tellement simple que nous n'y insisterions pas s'il ne se rattachait au problème suivant : *Trouver une surface sur laquelle il y ait un réseau conjugué formé de deux faisceaux de courbes planes, dont les plans ont en commun, pour chaque faisceau, une même droite fixe.*

Le cas particulier précité est celui où les deux droites sont parallèles; on y ramène, par voie d'homographie, le cas où les deux droites se coupent.

Quant au cas général, je l'ai traité, puis-je dire, sans m'en douter, dans un Mémoire inséré aux *Annales de l'École Normale* (Supplément de 1887), où j'ai résolu le problème suivant : *Trouver une surface telle que ses sections par les plans passant par une droite donnée soient les courbes de contact de la surface avec des cônes dont le sommet est situé sans cesse sur une autre droite donnée.* En effet, d'après une proposition de M. Kœnigs, que je ne connaissais pas à cette époque, les courbes conjuguées des sections faites sur une surface par un plan passant par une droite Δ, sont les courbes de contact de la surface avec les surfaces coniques dont le sommet est situé sur Δ. Donc, si Δ et Δ' sont les deux droites dont il est question dans le premier de nos deux énoncés, les courbes conjuguées

des sections planes dont le plan passe par Δ' sont les sections planes dont le plan passe par Δ, et les deux problèmes se transforment l'un dans l'autre; or, le deuxième donne lieu à une intégration qui m'a paru intéressante. En effet, si les équations de Δ sont $X = 0$, $Y = 0$, et si les équations de Δ' sont $Z = 0$, $U = 0$, l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \frac{\partial^2 Y}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\,\partial\beta} \\ X & Y & Z & U \\ \frac{\partial X}{\partial\alpha} & \frac{\partial Y}{\partial\alpha} & \frac{\partial Z}{\partial\alpha} & \frac{\partial U}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial X}{\partial\beta} & \frac{\partial Y}{\partial\beta} & \frac{\partial Z}{\partial\beta} & \frac{\partial U}{\partial\beta} \end{vmatrix} = 0$$

exprimant la condition pour que les deux faisceaux de courbes α, β soient conjugués, doit être vérifiée si l'on y fait $Y = \alpha X$, $U = \beta Z$, et l'on doit trouver

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \alpha\frac{\partial^2 X}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial X}{\partial\beta} & \frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \beta\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial Z}{\partial\alpha} \\ X & \alpha X & Z & \beta Z \\ \frac{\partial X}{\partial\alpha} & \alpha\frac{\partial X}{\partial\alpha} + X & \frac{\partial Z}{\partial\alpha} & \beta\frac{\partial Z}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial X}{\partial\beta} & \alpha\frac{\partial X}{\partial\beta} & \frac{\partial Z}{\partial\beta} & \beta\frac{\partial Z}{\partial\beta} + Z \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \frac{\partial X}{\partial\beta} & \frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \frac{\partial Z}{\partial\alpha} \\ X & 0 & Z & 0 \\ \frac{\partial X}{\partial\alpha} & X & \frac{\partial Z}{\partial\alpha} & 0 \\ \frac{\partial X}{\partial\beta} & 0 & \frac{\partial Z}{\partial\beta} & Z \end{vmatrix} = 0.$$

Donc, on doit trouver trois fonctions A, B, C rem-

plissant les conditions suivantes :

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 X}{\partial\alpha\,\partial\beta} + A\frac{\partial X}{\partial\alpha} + B\frac{\partial X}{\partial\beta} + CX = 0,$$

$$(6)\qquad \frac{\partial X}{\partial\beta} + AX = 0,$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} + A\frac{\partial Z}{\partial\alpha} + B\frac{\partial Z}{\partial\beta} + CZ = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial\alpha} + BZ = 0.$$

On écrit la première de ces relations sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial X}{\partial\beta} + AX\right) + B\frac{\partial X}{\partial\beta} + \left(C - \frac{\partial A}{\partial\alpha}\right)X = 0,$$

et, en la comparant avec la deuxième, on trouve

$$\frac{\partial A}{\partial\alpha} = C - AB.$$

On trouverait de même

$$\frac{\partial B}{\partial\beta} = C - AB.$$

On en déduit

$$\frac{\partial A}{\partial\alpha} = \frac{\partial B}{\partial\beta};$$

par suite, il existe une fonction D telle que l'on a

$$(7)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{\partial \log D}{\partial\beta}, \qquad B = \dfrac{\partial \log D}{\partial\alpha}, \\ C = \dfrac{\partial^2 \log D}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \dfrac{1}{D^2}\dfrac{\partial D}{\partial\alpha}\dfrac{\partial D}{\partial\beta} = \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial^2 D}{\partial\alpha\,\partial\beta}. \end{cases}$$

En vertu des relations (7), l'équation (6) devient

$$\frac{\partial(DX)}{\partial\beta} = 0.$$

On tire de là

$$DX = f(\alpha),$$

et ceci concorde avec l'équation (5), qui devient, en vertu de (7),

$$\frac{\partial^2(DX)}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0.$$

On trouve de même

$$DZ = \varphi(\beta),$$

et l'on en conclut

$$\frac{X}{Z} = \frac{f(\alpha)}{\varphi(\beta)},$$

ou bien

$$\frac{X}{Z} = \frac{f\left(\frac{Y}{X}\right)}{\varphi\left(\frac{Z}{U}\right)},$$

ou encore

$$\frac{1}{X} f\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{1}{Z}\varphi\left(\frac{Z}{U}\right),$$

résultat conforme à celui que j'avais signalé dans le Mémoire précité.

[O¹2e]

DÉTERMINATION DES COURBES PLANES PAR CERTAINES PROPRIÉTÉS DE LEUR RAYON DE COURBURE;

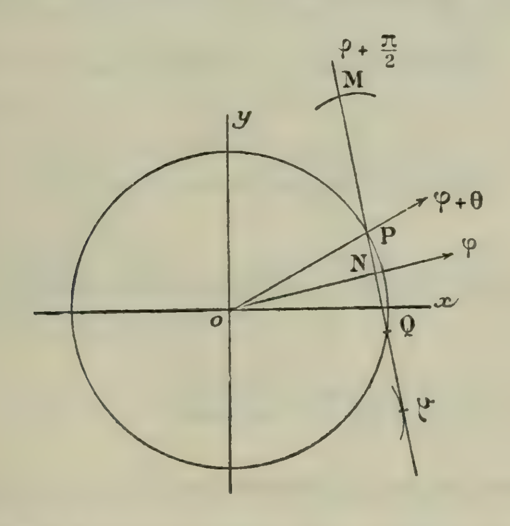
Par M. J. HAAG.

---

1. Dans le numéro de juin 1913 des *Nouvelles Annales*, M. Turrière étudie certaines courbes définies par une propriété particulière de leur rayon de courbure et montre que leur détermination se ramène à des quadratures. Je vais indiquer une autre méthode pour

résoudre les mêmes questions ainsi que des questions beaucoup plus générales.

Premier problème. — Soit d'abord le cercle fixe de centre O et de rayon a, rencontré en P et Q par la



normale en M à une courbe (C). Soit μ le centre de courbure correspondant. M. Turrière cherche les courbes telles que $\frac{\overline{\text{MP}}}{\overline{\text{M}\mu}} = \text{const.}$ Plus généralement, cherchons *les courbes pour lesquelles il existe une relation quelconque entre* $\overline{\text{MP}}$ *et* $\overline{\text{M}\mu}$, *ou*, ce qui revient au même, *entre* $\overline{\mu\text{P}}$ *et* $\overline{\mu\text{M}}$.

Fixons la position de NM par les angles polaires φ et $\varphi+\theta$ de ON et de OP et déterminons la relation qui doit exister entre φ et θ pour que l'on ait constamment

$$\overline{\mu\text{M}} = -f(\overline{\mu\text{P}}),$$

f représentant une fonction donnée.

Orientons la développée (μ) de manière que la demi-tangente positive en μ ait pour angle polaire $\varphi+\frac{\pi}{2}$. On peut choisir une origine des arcs sur cette courbe

telle que l'abscisse curviligne s du point μ soit égale à $-\overline{\mu M}$. Si l'on pose alors $\overline{\mu P} = \lambda$, on aura

$$s = f(\lambda). \tag{1}$$

Ceci étant, on a

$$\overline{ON} = a\cos\theta, \qquad \overline{NP} = a\sin\theta; \tag{2}$$

puis

$$\overline{N\mu} = \frac{d(a\cos\theta)}{d\varphi} = -a\sin\theta\frac{d\theta}{d\varphi};$$

d'où

$$\lambda = \overline{\mu P} = \overline{\mu N} + \overline{NP} = a\sin\theta\left(1 + \frac{d\theta}{d\varphi}\right)$$

ou

$$d\varphi = \frac{a\sin\theta\, d\theta}{\lambda - a\sin\theta}. \tag{3}$$

On sait maintenant la formule

$$\frac{ds}{d\varphi} = \left[a\cos\theta + \frac{d^2(a\cos\theta)}{d\varphi^2}\right].$$

En tenant compte de (3), elle devient

$$\frac{ds}{d\varphi} = +a\cos\theta\frac{d(\lambda - a\sin\theta)}{d\varphi},$$

ou

$$ds = -d\lambda + a\cos\theta\, d\theta + a\cos\theta\frac{a\sin\theta\, d\theta}{\lambda - a\sin\theta},$$

$$ds = -d\lambda + \frac{a\lambda\cos\theta\, d\theta}{\lambda - a\sin\theta}.$$

Tenant compte de (1), il vient

$$d\lambda\left[\frac{1 + f'(\lambda)}{\lambda}\right] = \frac{a\cos\theta\, d\theta}{\lambda - a\sin\theta}.$$

Si l'on pose

$$g(\lambda) = \frac{1 + f'(\lambda)}{\lambda}, \qquad u = a\sin\theta, \tag{4}$$

cette équation s'écrit

$$\frac{du}{d\lambda} + u g(\lambda) = \lambda g(\lambda); \tag{5}$$

équation linéaire qui donnera u en fonction de λ par *deux quadratures*. En portant dans (3), on aura φ par *une nouvelle quadrature*. Finalement, *par trois quadratures, on saura exprimer* θ *et* φ *en fonction de* λ. Des calculs algébriques donneront ensuite les coordonnées de μ; d'où celles de M en observant que $\overline{\mu M} = -f(\lambda)$.

Dans le cas de M. Turrière, on a, en conservant les notations de ce géomètre,

$$f(\lambda) = \frac{1-k}{k}\lambda, \qquad g(\lambda) = \frac{1}{(1-k)\lambda}.$$

L'équation (5) s'intègre alors à vue et donne

$$u = \frac{\lambda}{2-k} + C\lambda^{\frac{1}{k-1}} \qquad (C = \text{const.}); \tag{6}$$

puis

$$\varphi = \frac{1}{1-k}\int \frac{\left[\frac{1}{2-k} + C\lambda^{\frac{2-k}{k-1}}\right] d\lambda}{\sqrt{a^2 - u^2}}. \tag{7}$$

Il ne serait sans doute pas difficile d'identifier ces résultats avec ceux de M. Turrière, en observant que les lettres φ et u ont ici la même signification qne dans son Mémoire.

2. Deuxième problème. — Soit maintenant à *déterminer une courbe telle que si* θ *et* s *désignent l'angle polaire et l'abscisse curviligne d'un de ses points et* ρ *le rayon de courbure en ce point, on ait*

$$\frac{d\theta}{ds} = f(\rho), \tag{1}$$

f désignant toujours une fonction donnée. Dans le cas où celle-ci est de la forme $a + \frac{b}{\rho}$ (a, b = const.), on retombe sur le problème examiné par M. Turrière au paragraphe 4 de son article.

Soient $\theta + V$ l'angle polaire de la demi-tangente positive et r le rayon vecteur. On a, outre la relation (1),

$$ds = \rho(d\theta + dV), \tag{2}$$

$$dr = ds \cos V, \tag{3}$$

$$r\, d\theta = ds \sin V. \tag{4}$$

Entre ces quatre équations, qui renferment cinq variables θ, s, ρ, V, r, nous allons éliminer quatre de celles-ci. Éliminons d'abord ds et $d\theta$, ce qui ne présente aucune difficulté :

$$\frac{\sin V}{2} = f(\rho), \tag{5}$$

$$\frac{dr}{\cos V} = \rho \operatorname{tang} V \frac{dr}{r} + \rho\, dV. \tag{6}$$

Enfin, éliminons r, ce qui est également très facile :

$$\frac{f\, dV - \operatorname{tang} V f'\, d\rho}{f^2} = \rho \left[dV + dV - \frac{f'}{f} \operatorname{tang} V\, d\rho \right],$$

ou

$$dV \left(\frac{1}{f} - 2\rho \right) = \operatorname{tang} V \frac{f'}{f} \left(\frac{1}{f} - \rho \right) d\rho,$$

ou

$$\cot V\, dV = \frac{[1 - \rho f(\rho)] f'(\rho)}{f(\rho)[1 - 2\rho f(\rho)]}\, d\rho. \tag{7}$$

Une quadrature donne donc V en fonction de ρ. Portant dans (5), on a r. Enfin, l'élimination de ds entre (1) et (2) donne

$$d\theta = \frac{\rho f(\rho)\, dV}{1 + \rho f(\rho)}; \tag{8}$$

d'où θ par une *nouvelle quadrature*.

Finalement, *on peut avoir* r, θ, V *en fonction de* ρ *par deux quadratures.*

On peut aussi effectuer les éliminations dc la manière suivante.

Éliminons ds et V ; nous avons

$$(9) \qquad d\theta\left(\frac{1}{\rho f}-1\right)=dV,$$

$$(10) \qquad \cos V=f(\rho)\frac{dr}{d\theta},$$

$$(11) \qquad \sin V=rf(\rho).$$

Différentions (11), en tenant compte de (9) et (10); il vient

$$f(\rho)\frac{dr}{d\theta}d\theta\left(\frac{1}{\rho f}-1\right)=dr\,f(\rho)+rf'(\rho)\,d\rho,$$

ou

$$(12) \qquad \frac{dr}{r}=\frac{f'(\rho)\,d\rho}{\frac{1}{\rho}-2f(\rho)}.$$

Une quadrature donne ρ en fonction de r. Ensuite, en élevant (10) et (11) au carré et ajoutant, on a

$$(13) \qquad \theta=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{f^2(\rho)}-r^2}}.$$

Dans le cas examiné par M. Turrière, on a

$$f(\rho)=a+\frac{b}{\rho}.$$

L'équation (12) donne

$$\log r=\int\frac{df}{\frac{f-a}{b}-2f}=\int\frac{df}{f\left(\frac{1}{b}-2\right)-\frac{a}{b}}.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{1}{b} - 2 = m;$$

nous avons

$$\log r = \frac{1}{m}\log\left(fm - \frac{a}{b}\right) - \frac{1}{m}\log C \qquad (C = \text{const.});$$

d'où

$$fm - \frac{a}{b} = C r^m. \tag{14}$$

Portant dans (13), il vient

$$\int \frac{\left(\frac{a}{b} + C r^m\right) dr}{\sqrt{m^2 - \left(\frac{a}{b} + C r^m\right)^2 r^2}}, \tag{15}$$

ce qui est, aux notations près, la formule (12) de M. Turrière. De plus, l'équation (4) donne la formule intéressante

$$\frac{1}{\rho} = \frac{C r^m + 2a}{1 - 2b} = \alpha r^m + \beta. \tag{16}$$

[D3cα]

THÉORÈMES DE LA MOYENNE SANS RESTRICTIONS;

Par M. Michel PETROVITCH.

---

1. Soient u et v deux fonctions, réelles ou imaginaires, de la variable x. De l'identité

$$uv = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \frac{1}{2}(u - v)^2 \tag{1}$$

on tire

$$\int_a^b uv\,dx = \mathrm{V} - \delta, \tag{2}$$

où

$$\mathrm{V} = \frac{1}{2}\int_a^b u^2\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b v^2\,dx, \tag{3}$$

$$\delta = \frac{1}{2}\int_a^b (u-v)^2\,dx. \tag{4}$$

Sous la seule restriction, relative au chemin d'intégration, que celui-ci soit réel et de longueur finie, on voit que :

1° Si u et v ont soit la partie réelle, soit la partie imaginaire commune, l'expression $(u-v)^2$ est réelle et d'un signe invariable dans l'intervalle (a, b) ; par suite, on aura

$$\delta = \frac{b-a}{2}\chi(c)^2 \tag{5}$$

avec

$$\chi(x) = u - v$$

et c étant une valeur comprise entre a et b ;

2° Si u et v diffèrent à la fois par leurs parties réelles et imaginaires, l'expression $(u-v)^2$ est imaginaire et l'on aura, d'après une proposition de M. Darboux,

$$\delta = \frac{b-a}{2}\theta\,e^{\omega i}\chi(c)^2, \tag{6}$$

θ et ω étant deux quantités réelles, comprises : la première entre 0 et 1, et la seconde entre 0 et 2π.

Il s'ensuit que

$$\int_a^b uv\,dx = \mathrm{V} - \lambda\,\chi(c)^2, \tag{7}$$

où λ est un facteur dont le module ne surpasse

jamais $\frac{b-a}{2}$ *et qui se réduit à* $\frac{b-a}{2}$ *lorsque* u *et* v *ont soit la partie réelle, soit la partie imaginaire commune.*

L'intérêt que peut présenter cette forme du théorème de la moyenne consiste en ce qu'elle conduit à décomposer l'intégrale

$$\int_a^b uv\,dx \tag{8}$$

en deux, dont l'une ne dépend que de u et l'autre de v, avec un terme correctif dont on connaît les limites supérieure et inférieure, *et cela sans aucune restriction sur* u *et* v *autre que celle que les intégrales aient un sens.*

Dans le cas de u et v réels, l'intégrale (8) est comprise entre

$$V - \frac{b-a}{2} M^2 \quad \text{et} \quad V - \frac{b-a}{2} N^2,$$

où M et N sont la plus grande et la plus petite valeur absolue que prend la différence $u - v$ lorsque x varie entre a et b. En prenant donc pour (8) la valeur

$$V - (b-a)\frac{M^2 + N^2}{4}, \tag{9}$$

on commet une erreur dont la valeur absolue n'excède pas

$$(b-a)\frac{M^2 - N^2}{4}. \tag{10}$$

2. L'identité

$$uv = \frac{1}{4}(u+v)^2 - \frac{1}{4}(u-v)^2 \tag{11}$$

fournit

$$\int_a^b uv\,dx = \frac{1}{4}\int_a^b (u+v)^2\,dx - \xi, \tag{12}$$

où

$$\xi = \frac{1}{4}\int_a^b (u-v)^2\,dx. \tag{13}$$

Il s'ensuit que

$$\int_a^b uv\,dx = \frac{1}{4}\int_a^b (u+v)^2\,dx - \frac{\lambda}{2}\chi(c)^2, \tag{14}$$

où $\chi(x)$, λ et c ont les significations du paragraphe précédent, et cela sans aucune restriction sur u et v autre que celle que les intégrales aient un sens.

Dans le cas de u et v réels, en posant

$$\frac{1}{4}\int_a^b (u+v)^2\,dx = W, \tag{15}$$

l'intégrale (12) est comprise entre

$$W - \frac{b-a}{4}M^2 \qquad \text{et} \qquad W - \frac{b-a}{4}N^2,$$

de sorte qu'en prenant pour (12) la valeur

$$W - (b-a)\frac{M^2+N^2}{8}, \tag{16}$$

on commet une erreur dont la valeur absolue n'excède pas

$$(b-a)\frac{M^2-N^2}{8}. \tag{17}$$

3. Les inégalités intuitives

$$\left|\int_a^b uv\,dx\right| < \frac{1}{2}\int_a^b |u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b |v|^2\,dx, \tag{18}$$

$$\left|\int_a^b uv\,dx\right| < \frac{1}{4}\int_a^b |u+v|^2\,dx, \tag{19}$$

comprises dans les propositions précédentes, ne sont que des cas particuliers des inégalités plus générales

$$(20)\quad \left|\int_L u_1 u_2 \ldots u_n \, dx\right| < \frac{1}{n}\int_L |u_1|^n \, dx + \ldots + \frac{1}{n}\int_L |u_n|^n \, dx,$$

$$(21)\quad \left|\int_L u_1 u_2 \ldots u_n \, dx\right| < \frac{1}{n^n}\int_L (|u_1| + \ldots + |u_n|)^n \, dx,$$

L étant l'arc d'intégration et $u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant des fonctions de x quelconques, en nombre arbitraire. Elles sont la conséquence directe de la relation d'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique d'un nombre quelconque de quantités réelles positives.

Nous en ferons l'application suivante. Soient

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

les termes, réels ou imaginaires, d'une série, fonctions d'une variable t, la série étant supposée absolument et uniformément convergente pour les valeurs de t appartenant à un domaine déterminé (D) dans le plan de t.

Considérons la série

$$(22)\qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

ayant pour coefficient général a_n l'expression

$$(23)\qquad a_n = \int_L u_1 u_2 \ldots u_n \, dt,$$

l'arc d'intégration L étant de longueur finie et compris dans le domaine (D). De

$$(24)\qquad \sum_1^n |u_i| < \mu,$$

où μ est la somme de la série convergente

$$\sum_{1}^{\infty} |u_i|, \tag{25}$$

on conclut, en vertu de (21), que

$$|a_n| < \frac{s\mu^n}{n^n}, \tag{26}$$

où s est la longueur de l'arc d'intégration.

On en conclut d'abord que : *la série* (22) *représente une fonction entière de z, du genre zéro ou un, dont le module est, pour toute valeur de z, plus petit que*

$$|a_0| + s\,\Delta(\mu r), \tag{27}$$

où $\Delta(z)$ désigne la transcendante entière

$$\Delta(z) = \frac{z}{1^1} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^3} + \ldots \tag{28}$$

et r étant le module de z.

Or, la formule connue

$$\int_0^1 \left(t \log \frac{1}{t}\right)^n = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} \tag{29}$$

conduit à la formule

$$\Delta(z) = z \int_0^1 e^{z t \log \frac{1}{t}}\, dt, \tag{30}$$

valable pour toute valeur réelle et imaginaire de z, faisant voir que

$$\Delta(r) < r\, e^{\frac{r}{e}}, \tag{31}$$

ce qui montre que : *le module de $f(z)$ est, pour toute*

valeur de z, plus petit que

(32) $$|a_0| + s\mu e^{\frac{\mu r}{e}}.$$

Il s'ensuit, par exemple, que l'intégrale de Jensen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(r e^{\theta i})|\, d\theta,$$

rattachée à la fonction $f(z)$, a sa valeur plus petite que

$$\log\left(|a_0| + s\mu r e^{\frac{\mu r}{e}}\right),$$

d'où l'on peut tirer des conclusions à l'égard des zéros de $f(z)$ compris à l'intérieur d'une circonférence quelconque décrite autour de $z = 0$ dans le plan de z.

[I9b, M⁴m]

COURBES DÉCOUPANT SUR UNE DROITE FIXE LES LONGUEURS REPRÉSENTANT LA SUITE INDÉFINIE DES NOMBRES PREMIERS;

Par M. Michel PETROVITCH.

---

1. On peut, de la manière suivante, former des classes étendues de courbes planes C douées de la propriété remarquable de rencontrer une droite fixe (que nous prendrons pour l'axe des x) aux points *dont les abscisses forment la suite indéfinie de nombres premiers positifs.*

Soit $\theta\ (x, u)$ une fonction réelle de deux variables x et u, ne s'annulant pour aucune paire de valeurs réelles fractionnaires (x, u) et s'annulant pour toute paire de valeurs entières de ces variables.

Telle serait, par exemple, la fonction

$$a\cos 2\varpi x + b\cos 2\varpi u - (a+b)$$

ou bien la fonction

$$a\sin^m \varpi x + b\sin^m \varpi u$$

(m étant un entier pair positif, a et b deux constantes positives); et, plus généralement, la fonction

$$\varphi_1(\sin\varpi x) + \varphi_2(\sin\varpi u),$$

où $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ sont deux fonctions réelles, paires, positives, s'annulant pour $z = 0$. D'ailleurs une puissance positive quelconque d'une fonction $\theta(x, u)$ est également une fonction $\theta(x, u)$.

Soit $\Phi(x)$ l'une quelconque parmi les fonctions obtenues en remplaçant dans une fonction $\theta(x, u)$ la variable u par la fonction

$$u = \frac{1 + \Gamma(x)}{x}. \tag{1}$$

D'après le théorème arithmétique de Waring-Wilson, complété par Lagrange, et les propriétés élémentaires de la fonction $\Gamma(x)$, pour que l'expression (1), x étant un *entier*, ait également une valeur *entière*, il faut et il suffit que x soit un nombre *premier* positif.

Toute courbe

$$y = \Phi(x) \tag{2}$$

est donc une courbe C.

Ainsi la courbe

$$y = (a+b) - a\cos 2\varpi x - b\cos 2\varpi u.$$

présente un nombre illimité d'oscillations à droite de l'axe des y et au-dessus l'axe des x, d'amplitudes varia-

bles inférieures à 2 $(a+b)$, *touchant* l'axe des x aux points dont les abscisses sont les nombres premiers; tout point de l'axe des x, ayant pour abscisse un nombre premier positif, est un point de contact de la courbe et de cet axe.

La courbe

$$y^2 = (a+b) - a\cos 2\varpi x - b\cos 2\varpi u$$

coupe, en oscillant, l'axe des x aux points dont les abscisses forment la suite indéfinie des nombres premiers positifs.

2. Nous signalerons une question qui se présente dans ce même ordre d'idées et qui, résolue dans le sens affirmatif, ne serait pas dénuée d'un certain intérêt arithmétique.

Il existe des fonctions telles qu'elles-mêmes et leurs dérivées secondes soient réelles, finies et continues pour les valeurs positives de x, ayant la suite indéfinie de nombres *entiers* positifs comme zéros *simples*, sans s'annuler pour aucune autre valeur positive de x. Telle serait, par exemple, la fonction élémentaire $\sin\varpi x$.

Peut-on construire une fonction $\Phi(x)$ *telle qu'elle-même et sa dérivée seconde soient réelles, finies et continues pour les valeurs positives de* x *et qu'elles aient la suite indéfinie des nombres premiers positifs comme zéros simples, sans s'annuler pour aucune autre valeur positive de* x^2 ?

Une telle fonction Φ étant supposée construite, l'expression

$$(3) \qquad \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{dx^2}$$

serait réelle, finie, continue et différente de zéro pour toute valeur positive de x. De plus, elle serait néces-

sairement *négative* pour x variant de o à ∞, car s'il n'en était pas ainsi, comme elle ne changerait pas de signe dans cet intervalle, elle y serait constamment positive et, d'après le théorème connu sur les équations linéaires du second ordre, la fonction Φ aurait au plus un zéro simple positif, ce qui n'est pas le cas.

La courbe (2), représentant une telle fonction Φ, aurait pour x positif une allure sinusoïdale, tournant constamment sa concavité vers l'axe des x et coupant cet axe (sans jamais le toucher) aux points dont les abscisses seraient les nombres premiers; c'est en ces points que l'ordonnée de la courbe et sa concavité changeraient à la fois de sens et ce seraient les seuls points d'inflexion de la courbe.

En désignant alors par $-\mathrm{M}$ *et* $-\mathrm{N}$ *une limite inférieure et une limite supérieure de l'expression* (3), *le nombre de nombres premiers, compris dans un intervalle positif donné* (a, b), *serait compris entre les valeurs*

$$\frac{(b-a)\sqrt{\mathrm{N}}}{\varpi} \quad \text{et} \quad \frac{(b-a)\sqrt{\mathrm{M}}}{\varpi}+2.$$

D'après ce qu'on sait sur les zéros simples des intégrales oscillantes des équations linéaires du second ordre [1], il y aurait même moyen de resserrer notablement ces limites.

---

[1] *Voir* par exemple ma Communication : *Fonctions implicites oscillantes* (*Proceedings of the fifth Congress of mathematicians, Cambridge*, 1912).

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère la surface définie, en coordonnées cylindriques, par l'équation*

$$z = 4a\sqrt{r}\sin\frac{\psi}{2},$$

et l'on demande :

1° *Une description sommaire de la surface;*
2° *L'équation du plan tangent et les cosinus de la normale en l'un de ses points;*
3° *Ses lignes asymptotiques;*
4° *Les rayons principaux en l'un de ses points;*
5° *L'équation différentielle de ses lignes de courbure.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer la portion de l'aire de la sphère*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2cx$$

qui est comprise dans le cône

$$a^2x^2 + b^2y^2 = z^2,$$

en supposant $a^2 > b^2$. (Juillet 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Trouver une courbe dans laquelle la longueur s de l'arc limité à un point* M *soit proportionnelle à la puissance* $n^{\text{ième}}$ *de l'ordonnée y de ce point. Cas d'intégrabilité. Étudier les cas particuliers où l'on a*

1° $n = \frac{1}{2}$; 2° $n = \frac{2}{3}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver une solution complète de*

l'équation

$$x^3 pq + x^2 y q^2 + px + z = 0$$

et former la solution singulière correspondante.

Vérifier, d'autre part, que

$$z = -\frac{(1+y)^2}{4x^2} \qquad \text{et} \qquad z = 1 + \frac{2\sqrt{y}}{x}$$

sont aussi des solutions.

Déduire ces solutions de la solution complète par la variation des constantes, et déterminer la nature de ces solutions par rapport à cette solution complète.

(Novembre 1912.)

Lille.

Épreuve théorique. — I. *Établir la formule qui permet de calculer la dérivée de la fonction*

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx,$$

a et b désignant deux fonctions de α.

II. *Étant donné un système d'axes rectangulaires* Ox, Oy, *trouver une courbe tangente en* O *à* Ox *et telle qu'en chaque point* M *le rayon de courbure* ρ *et la longueur* S *de l'arc* OM *soient liés par la relation*

$$\rho = \frac{a^2}{S}.$$

Construire la courbe obtenue.

Épreuve pratique. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' y^{\text{IV}} - \frac{5}{3}(y''')^2 = 0.$$

II. *Calculer les intégrales définies*

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \qquad J_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

où n désigne un nombre entier.

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de cours. — *Calculer les intégrales de Fresnel*

$$\int_0^\infty \cos x^2\, dx, \qquad \int_0^\infty \sin x^2\, dx$$

en les réunissant en une intégrale complexe, et en les rattachant à l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ *le long de l'axe réel. On pourra démontrer d'abord que les intégrales de Fresnel ont un sens, en les transformant en séries alternées.*

II. Problèmes. — 1° *Généraliser les résultats précédents en considérant les intégrales*

$$\int_0^\infty \cos x^n\, dx, \qquad \int_0^\infty \sin x^n\, dx,$$

où n désigne un nombre réel plus grand que 1, *et prises le long de l'axe réel, et en les rattachant à l'intégrale* $\int_0^\infty e^{-x^n} dx$ *le long de l'axe réel. Exprimer cette dernière intégrale, et les deux précédentes, au moyen de la fonction* Γ.

2° *Soient* Ox, Oy, Oz *trois axes rectangulaires : on considère les surfaces telles qu'en un point quelconque* M *le rayon vecteur* OM *et l'intersection du plan tangent et du plan déterminé par le point* M *et la droite* Oz *fassent un angle constant* α. *Former l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle satisfont ces surfaces. Cette équation se décompose en deux équations linéaires; intégrer ces équations : on pourra les transformer en substituant aux variables* x, y, z *les coordonnées polaires dans l'espace* ρ, θ, φ *telles que l'on ait*

$$x = \rho \cos\theta \cos\varphi, \qquad y = \rho \cos\theta \sin\varphi, \qquad z = \sin\theta.$$

Définir géométriquement les courbes caractéristiques. Examiner en particulier le cas où l'angle α *est droit.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Déterminer l'intégrale géné-*

rale et l'intégrale singulière de l'équation différentielle

$$(yy''' - y'y'')^2 - 4(y'y''' - y''^2)(yy'' - y'^2) = 0.$$

2° *Intégrer l'équation différentielle linéaire du second ordre*

$$x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = e^x(x^2 - 3x + 3),$$

sachant que l'équation sans second membre admet comme intégrale particulière un polynome du premier degré.

(Juillet 1912.)

Épreuve théorique. — I. Question de cours. — *Donner des conditions suffisantes pour que la fonction* $X + iY$ *de la variable complexe* $x + iy$ *ait une dérivée au point* x, y.

II. Problèmes. — 1° z *désignant une variable complexe, on considère la fonction* z^m. *Comment sont distribuées, dans le plan de cette seconde variable* z^m, *les valeurs correspondant à une même valeur de* z? *On étudiera successivement les cas où* m *est entier, fractionnaire, réel et incommensurable, purement imaginaire, imaginaire avec une partie réelle différente de zéro.*

2° *Déterminer une courbe plane telle qu'en chaque point* M *de cette courbe le rayon de courbure soit proportionnel à la distance du point* M *à un point fixe* O *du plan de la courbe. Tracer les courbes obtenues.*

On pourra prendre des coordonnées polaires de pôle O.

Épreuve pratique. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'^2 = f(y),$$

où $f(y)$ *désigne un polynome du quatrième degré en* y *à coefficients constants, dans les différents cas où ce polynome n'a pas ses racines distinctes. Dans chaque cas, on pourra simplifier ce polynome par une transformation homographique effectuée sur la fonction* y.

II. *Calculer le volume de l'hypersphère de rayon* 1 *dans l'espace à quatre dimensions, c'est-à-dire l'intégrale qua-*

druple $\int\int\int\int dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$ *étendue à l'ensemble des valeurs des variables* x_1, x_2, x_3, x_4 *telles que l'on ait*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leqq 1.$$

On pourra prendre de nouvelles variables analogues aux coordonnées polaires dans le plan et dans l'espace ordinaire. (Novembre 1912.)

Lyon.

Épreuve théorique. — I. *On envisage la fonction analytique* $f(z) = \dfrac{z}{u - e^{-iz}}$, *de la variable complexe* $z = x + iy$, *où* u *représente une quantité réelle et positive.*

Si $f(z) = \mathrm{X}(x, y) + i\,\mathrm{Y}(x, y)$, X *et* Y *étant des fonctions réelles de* x *et de* y, *calculer* $\mathrm{Y}(x, y)$, *et, en particulier* $\mathrm{Y}(x, 0)$.

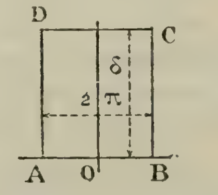
II. *Trouver tous les pôles de la fonction* $f(z)$.

III. *On considère le rectangle dont les côtés ont pour équations*

$$x = -\pi, \qquad x = +\pi, \qquad y = 0 \qquad \text{et} \qquad y = \delta;$$

δ *est une quantité positive que l'on fera croître au delà de toute limite. Montrer qu'il ne peut y avoir, au plus, qu'un pôle de* $f(z)$ *à l'intérieur de ce rectangle. Quel est ce pôle, quand il existe, et quel est alors le résidu de* $f(z)$ *par rapport à ce pôle?*

IV. *L'intégrale* $\int f(z)\,dz$, *prise le long du rectangle* ABCD, *étant désignée par* $(\mathrm{AB}) + (\mathrm{BC}) + (\mathrm{CD}) + (\mathrm{DA})$,



où (AB) *signifie* $\int_{\mathrm{AB}} f(z)\,dz$, *etc., montrer que l'on a* $\lim\limits_{\delta=\infty} (\mathrm{CD}) = 0$, *et calculer* $\lim\limits_{\delta=\infty} [(\mathrm{BC}) + (\mathrm{DA})]$.

V. *En appliquant le théorème de Cauchy, déduire de tous les résultats qui précèdent la valeur de l'intégrale* $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x \sin x \, dx}{1 - 2u \cos x + u^2}$, *en distinguant le cas où u est plus grand que* 1 *du cas où u est plus petit que* 1.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la surface* S *définie par les formules suivantes :*

$$x = \lambda \cot \alpha + \frac{\sin \lambda \operatorname{ch} \mu}{\sin \alpha},$$

$$y = \frac{\mu}{\sin \alpha} + \cot \alpha \cos \lambda \operatorname{sh} \mu,$$

$$z = - \cos \lambda \operatorname{ch} \mu,$$

$$\operatorname{ch} \mu = \frac{1}{2}(e^{\mu} + e^{-\mu}), \qquad \operatorname{sh} \mu = \frac{1}{2}(e^{\mu} - e^{-\mu}),$$

où α *est une constante,* λ *et* μ *des paramètres variables :*

1° *Calculer l'équation du plan tangent à la surface* S *au point* (λ, μ). *On trouvera dans chaque coefficient le facteur* $\operatorname{ch} \mu + \cos \alpha \cos \lambda$. *Que peut-on en conclure pour la courbe tracée sur* S, *et qui a pour équation*

$$\operatorname{ch} \mu + \cos \alpha \cos \lambda = 0 ?$$

2° *En posant*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

montrer que l'on a

$$ds^2 = \left(\frac{\operatorname{ch} \mu + \cos \alpha \cos \lambda}{\sin \alpha} \right)^2 (d\alpha^2 + d\mu^2 \sin^2 \alpha).$$

En conclure que les deux familles de courbes $\lambda =$ const. *et* $\mu =$ const. *forment un réseau orthogonal.*

3° *On vérifiera que ces deux familles de courbes* $\lambda =$ const. *et* $\mu =$ const. *forment aussi un réseau conjugué. Quelles sont les lignes de courbure? Démontrer qu'elles sont planes.*

4° *Calculer les cosinus directeurs a, b, c de la normale au point* (λ, μ) *à la surface* S, *et chercher les lignes dé-*

crites par le point (a, b, c) *quand le point* (x, y, z) *décrit les lignes de courbure de* S.

5° *Lignes asymptotiques de* S.

(Novembre 1911.)

Épreuve théorique. — *On considère la surface* S *définie en axes coordonnées rectangulaires par les formules*

$$x = \operatorname{ch} u \cos v,$$
$$y = \operatorname{ch} u \sin v,$$
$$z = \operatorname{sh} u,$$
$$\operatorname{ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$
$$\operatorname{sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}.$$

Chercher les lignes G *de cette surface, telles que le plan osculateur soit constamment normal à la surface (géodésiques).*

En regardant v *comme une fonction de* u *et posant*

$$v' = \frac{dv}{du}, \qquad v'' = \frac{d^2 v}{du^2},$$

on arrivera à l'équation différentielle

$$2v' \operatorname{sh}^3 u + v'^3 \operatorname{sh} u \operatorname{ch}^2 u + v'' \operatorname{ch} u (\operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u) = 0.$$

Montrer que cette équation s'intègre par quadratures. On peut aussi observer que l'équation admet comme solutions particulières les lignes de courbure de l'une des familles (on dira laquelle), et les lignes asymptotiques. On est alors amené à poser

$$v' = \frac{\lambda}{\operatorname{ch} u} = \frac{dv}{du},$$

λ *étant la nouvelle fonction inconnue. (Expliquer pourquoi.) Calculer* λ.

λ *étant connu,* v *est donné au moyen d'une intégrale elliptique.*

La détermination des trajectoires orthogonales des courbes G *dépend aussi d'une intégrale elliptique. Mon-*

trer que l'on trouve comme courbes G *particulières les courbes de* S *à tangentes isotropes* (*courbes de longueur nulle*).

Entre l'angle φ, *sous lequel une courbe* G *donnée coupe un parallèle de* S *et le rayon* R *de ce parallèle, existe une relation simple que l'on propose d'obtenir.*

(Juillet 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$qx - py + k = a\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

où a *et* k *sont des constantes. Que devient cette équation si l'on adopte les coordonnées semi-polaires* ρ, ω, z?

$$(x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega.)$$

II. *Le changement de variables effectué, en déduire une intégrale complète de la forme*

$$z = h\omega + f(h, \rho) + C,$$

h *et* C *étant les deux constantes arbitraires.*

III. *En cherchant les lignes asymptotiques de la surface obtenue, prouver que l'on a affaire à un hélicoïde développable et trouver l'arête de rebroussement.*

IV. *Lignes de courbure.*

Nota. — *On rappellera que les lignes asymptotiques de la surface*

$$z = h\omega + f(\rho)$$

sont données par l'équation

$$d\omega = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - \rho^3 f'(\rho) f''(\rho)}}{\rho^2 f'(\rho)} d\rho.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit*

$$f(u) = \frac{\sigma(2a)\sigma^2 u}{\sigma^2 a\,\sigma(u-a)\sigma(u+a)}$$

où

$$\sigma = u \Pi' \left[\left(1 - \frac{u}{w} \right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2}} \right],$$

$$w = 2m\omega + 2m'\omega';$$

$f(u)$ est une fonction doublement périodique; on demande de la décomposer en éléments simples, puis de l'exprimer en fonction rationnelle de ω.

Quelle relation y a-t-il entre $f(u)$ et $f'(u)$?

On suppose ω et $\frac{\omega'}{i}$ réels et positifs, et $2\omega > a > \omega$; construire la courbe $y = f(x)$ dans l'intervalle (O, ω). Calculer la surface comprise entre l'axe Ox, la courbe et la droite $x = \omega$.

Marseille.

Épreuve théorique. — 1° *Écrire sans explication l'équation de l'indicatrice en un point d'une surface lorsque ce point est pris pour origine des coordonnées et que les axes des x et des y sont tracés dans le plan tangent.*

2° *Si un plan mobile est tangent en un point* M *à une surface* S *et si le point* M *décrit une courbe* C *située sur* S, *la tangente à la courbe* C *et la caractéristique du plan mobile sont dirigées suivant deux diamètres conjugués de l'indicatrice de* S.

3° *Une surface étant représentée par les deux équations, où entre un paramètre a et des coordonnées semi-polaires,*

$$z = a\mathrm{F}(\theta) = \sqrt{a^2 - r^2} - a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r} + f(a),$$

$$0 = \mathrm{F}(\theta) - \log \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r} + f'(a),$$

vérifier que l'on a

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r}.$$

4° *Calculer l'angle que font le plan tangent en un point et le plan passant par ce point et l'axe des z.*

5° *En déduire une série de lignes de courbure et, ces*

lignes étant supposées connues, trouver la seconde série en se reportant aux deux premiers paragraphes.

SOLUTION.

$$\cos V = F'(\theta).$$

Les sections planes passant par Oz donnent la première série. Les autres lignes de courbure sont les courbes de contact des cônes circonscrits ayant leurs sommets sur Oz. (Kœnigs.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer, à 0,01 près, l'intégrale*

$$I = \int \frac{e^{(1-i)z} - e^{(1-i)z}}{z^2} dz,$$

en supposant que le point z décrive, dans le sens positif, un cercle ayant son centre à l'origine et de rayon arbitraire.

SOLUTION.

$$I = 2\pi i \, D_\alpha(e^{(1-i)\alpha} - e^{(1-i)\alpha})_{(\alpha-0)} = 4\pi = 12,56.$$

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Déterminer les surfaces minima de révolution.*

En d'autres termes, soient

$$x = \rho \cos\omega, \qquad y = \rho \sin\omega, \qquad z = \varphi(\rho)$$

les équations d'une surface de révolution ayant pour axe Oz; déterminer la fonction $\varphi(\rho)$ de sorte que, en chaque point de la surface, l'indicatrice soit une hyperbole équilatère, ou encore que les rayons de courbure principaux soient égaux et de signes contraires.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie*

$$y = \int_{-1}^{+1} \cos xt\,(1 - t^2)^2\, dt,$$

où x joue le rôle de paramètre.

Indiquer comment on arriverait au calcul de l'intégrale

plus générale

$$y = \int_{-1}^{+1} \cos xt\,(1 - t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dt,$$

lorsque $n - \frac{1}{2}$ *est un nombre entier positif et vérifier que, dans ce cas, l'intégrale définie* y *satisfait à l'équation de Bessel*

$$x\frac{dy^2}{dx^2} + (2n+1)\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

(Substituer y *de manière que l'équation prenne la forme* $\int_{-1}^{+1} \varphi(x, t)\,dt = 0$ *et vérifier qu'elle est une identité.)*

SOLUTION.

$$y = \frac{48 \sin x}{x^5} - \frac{48 \cos x}{x^4} - \frac{16 \sin x}{x^3}.$$

En tenant compte des limites de l'intégrale définie et après une intégration par parties qui rend les termes comparables on voit que l'équation de Bessel est satisfaite quand $n - \frac{1}{2}$ est un nombre entier positif.

Au sujet de ce calcul, on pourra consulter avec fruit le *Cours d'Analyse* de M. Goursat (t. II, 2e édition, p. 442-446).

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces* S *dont les normales sont à une distance constante* a *d'une droite fixe, lorsque, les coordonnées étant rectangulaires, on prend l'axe des* z *pour droite fixe.*

Soient p *et* q *les dérivées de* z *fonction des deux variables indépendantes* x *et* y *; on pose*

$$u = px = qy - z, \qquad p = \rho \cos\omega, \qquad q = \rho \sin\omega$$

et l'on demande de prendre u *pour fonction nouvelle et* ρ *et* ω *pour nouvelles variables indépendantes.*

Intégrer, en considérant x, y, z *et* u *comme des fonctions de* ρ *et de* ω.

Vérifier que les lignes de courbure d'une surface S *correspondent à ρ ou ω constant.*

Déterminer la fonction arbitraire introduite par le calcul de sorte que la surface S *passe par l'hélice*

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad z = a \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

SOLUTION.

On obtient

$$\frac{rx - py}{\sqrt{p^2 + q^2}} = a \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial \omega} = a\rho,$$

d'où

$$u = a\rho + f(\rho),$$
$$x = [a\omega + f'(\rho)]\cos\omega - a\sin\omega,$$
$$y = [a\omega + f'(\rho)]\sin\omega + a\cos\omega,$$
$$z = \rho f'(\rho) - f(\rho).$$

Si z est constant, ρ est constant, $\sqrt{p^2 + q^2}$ est constant, d'où, par théorèmes connus, une ligne de courbure plane.

Si ω est constant, x et y sont les coordonnées d'un point du plan $-x\sin\omega + y\cos\omega = a$, d'où seconde ligne de courbure plane.

Enfin,

$$\rho(z) = -z + \frac{(2n+1)\pi a}{2}.$$

Épreuve pratique. — 1° *Calculer l'intégrale indéfinie*

$$\int \log\left(z + \sqrt{1 - z^2}\right) dz.$$

2° *Vérifier que les deux intégrales définies réelles*

$$I = \int_0^x \log\left(z + \sqrt{1 - z^2}\right) dz \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^x \frac{(x - z)\,dz}{\sqrt{1 + z^2}}.$$

où, pour $z = 0$, on a $\sqrt{1 + z^2} = 1$ et $\log = 0$, sont égales, par la considération de leurs dérivées en x.

3° *Développer en séries entières en x les fonctions $\frac{d^2 I}{dx^2}$, $\frac{dI}{dx}$ et I. Fixer les cercles de convergence.*

4° *Étudier les diverses significations de la fonction* $z - \sqrt{1+z^2}$ *quand le point z décrit, dans le plan des z, des chemins allant du point* $z = 0$ *à un point désigné a n'annulant pas le radical.*

SOLUTION.

$$I = x \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + 1,$$

$$\frac{dJ}{dx} = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dI}{dx},$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

d'où son développement.

Par intégration, on a ceux de $\frac{dI}{dx}$ et de I.

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Détailler l'étude suivante :*

1° *L'intégrale réelle*

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$$

a une valeur finie si p est compris entre zéro et l'unité;

2° *On forme un contour simple fermé au moyen de deux circonférences C et C' décrites de l'origine comme centre avec des rayons R et R' et deux droites infiniment voisines de l'axe des x et de part et d'autre de la partie positive de cet axe, ces droites étant les deux bords d'une coupure établie entre les deux circonférences. La variable z ayant un argument constamment compris entre 0 et* 2π *calculer l'intégrale*

$$\int \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz$$

prise le long du contour fermé. On montrera d'abord que cette intégrale est infiniment petite soit sur le cercle intérieur C d'un rayon R infiniment petit, soit sur le cercle extérieur C' d'un rayon R' infiniment grand. On

arrivera ensuite à la relation

$$\int_0^\infty \frac{x^{1-q}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

3° *Les intégrales eulériennes*

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt \quad \text{et} \quad \Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}\,dt,$$

où p et q sont positifs, étant liées par la relation

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(y+q)B(p, q),$$

ce que l'on admettra, établir, pour p entre zéro et l'unité, la relation

$$\Gamma(p)\Gamma(1+p) = B(p, 1-p) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin px}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer l'ordre infinitésimal de la distance des droites polaires correspondant à deux points voisins pris sur une courbe gauche.*

Déterminer l'ordre infinitésimal de la distance du centre de la sphère osculatrice en un point de la courbe gauche au plan normal mené en un point voisin.

Démontrer que l'une des distances est, en partie principale, double de l'autre et que les deux distances ne sont jamais nulles identiquement.

SOLUTION.

Si l'on rapporte un élément de courbe C à son trièdre mobile tracé en un point pris pour origine, les coordonnées d'un point de cet élément sont déterminées par les formules connues

$$x = S - \frac{S^2}{6R_0^2} + \ldots,$$

$$y = \frac{S^2}{2R_0} + \ldots,$$

$$z = -\frac{S^3}{6R_0T_0} + \ldots$$

On voit de suite que la distance z au plan osculateur voisin est du troisième ordre avec S^3.

Un calcul très simple donne pour la distance δ de deux tangentes voisines

$$\delta = \frac{S^3}{12 R_0 T_0},$$

c'est-à-dire que la distance δ est aussi du troisième ordre et de plus δ est la moitié de z.

Si l'ordre de δ est constamment supérieur à 3, il en est de même de z et le plan osculateur étant constamment surosculateur, la courbe C est plane; c'est le théorème de Bouquet.

Soit C′ le lieu des centres des sphères osculatrices à la courbe C. Deux droites polaires voisines de C font entre elles l'angle de torsion $d\tau$ de l'ordre de l'élément d'arc ds. Mais ce sont aussi les tangentes de la courbe C′. Donc l'angle de contingence $d\sigma'$ de cette courbe C′ étant égal à $d\tau$ est aussi de l'ordre de ds. Enfin ds', arc de C′, étant de l'ordre de $d\sigma'$ est de l'ordre de ds et l'on peut prendre ds' au lieu de ds pour infiniment petit de comparaison. Il n'y a plus qu'à appliquer les théorèmes précédents en se rappelant que la droite polaire de C est la tangente à C′ et que le plan polaire de C est le plan osculateur de C′.

La courbe C′ ne peut être plane, car son plan serait normal à la courbe C et celle-ci n'aurait qu'un plan normal, ce qui est impossible. (Juin 1913.)

Montpellier.

Épreuve théorique. — *Intégrer l'équation*

$$x^3 y'^2 - 2x^2 y y' - 2y^3 + 2x^2 y + 3xy^2 - 2x^3 = 0.$$

1° *Construire les courbes intégrales de cette équation.*

2° *Combien passe-t-il de ces courbes par un point quelconque ?*

3° *Distinguer, aux points où passent deux intégrales, celles qui font partie de l'intégrale générale, et les autres.*

4° *Déterminer le rôle des intégrales*

$$y = x \quad \text{et} \quad y = -x.$$

Épreuve pratique. — A *et* B *étant, dans le plan des* xy, *les points de coordonnées* $(1, 0)$ *et* $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, *calculer l'intégrale curviligne*

$$\int_A^B \frac{(x+y)\,dx + (y-x)\,dy}{x^2+y^2}$$

suivant les chemins d'intégration C *et* C'.

1° C *est le segment rectiligne* AB.

2° C' *est la circonférence de centre* O, *de rayon* 1, *parcourue dans le sens direct à partir de* A, *une fois, et augmentée du segment rectiligne* AB.

Quelle est la valeur de l'intégrale si le chemin d'intégration est formé de la circonférence parcourue n *fois dans le sens direct, ou* p *fois dans le sens rétrograde, suivie du chemin rectiligne* AB?

(Novembre 1911.)

Épreuve théorique. — *On donne l'équation différentielle*

$$y - (x - y'^2)^2 = \frac{2}{3} y'^3.$$

La résoudre en prenant pour fonction inconnue $x - y'^2 = u$, *et pour nouvelle variable indépendante* y'.

Déterminer l'intégrale singulière et construire la courbe qui la représente.

Épreuve pratique. — *Résoudre le système d'équations différentielles simultanées*

$$\frac{dx}{dt} + 2x - 2z = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} - x + 2y - z = 0,$$

$$\frac{dz}{dt} - x - y + 2z = 0.$$

(Juin 1912.)

Épreuve théorique. — *Intégrer l'équation aux dérivées*

partielles

$$qyz + pz(x - a) + x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Indiquer une génération des surfaces intégrales et de la section de ces dernières par le plan des xy.

Déterminer celle qui contient l'axe des y.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Montrer que l'intégrale* $\int_0^\infty \frac{dz}{z^a(1+z)}$ *a un sens, et la calculer en utilisant le théorème des résidus appliqué à un contour constitué par deux circonférences concentriques à l'origine, ouvertes au voisinage de l'axe réel positif, de rayons respectivement infiniment grand et infiniment petit, et reliées par deux rayons infiniment voisins de cet axe.* (Novembre 1912.)

Nancy.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Énoncer et démontrer le théorème de Cauchy pour le calcul de l'intégrale d'une fonction de variable complexe le long d'un contour fermé. Donner un exemple.*

II. *On considère une surface* S *définie par les équations*

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = f(u, v).$$

1° *Former la condition pour que les sections de cette surface par les plans passant par* Oz *soient lignes de courbure. Cette condition exprime que la fonction* $f(u, v)$, *ou que la surface* $z = f(u, v)$, *vérifie une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre; soit* E.

2° *On peut toujours considérer les sections de la surface par les plans passant par* Oz, *ou la fonction* $f(u, v)$, *comme définissant les solutions d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, soit* F, *u étant la variable et v la constante d'intégration.*

Déterminer les solutions de l'équation E *pour lesquelles l'équation* F *est une équation de Riccati. Comment peut-on*

engendrer les surfaces S *correspondantes? Trouver la deuxième famille de lignes de courbure et montrer que les lignes de cette famille sont égales lorsque la surface* S *est un hélicoïde.*

3° *On peut définir, d'après la deuxième partie, des fonctions* $f(u, v)$, *dépendant d'un paramètre, solutions de l'équation* E. *L'enveloppe de ces fonctions, ou des surfaces* $z = f(u, v)$, *est-elle une solution de l'équation* E?

(Juin 1911.)

Épreuve théorique. — *On considère les courbes* C *dont les coordonnées, exprimées à l'aide d'un paramètre* u, *sont données par les équations*

$$x = x_0 e^{\alpha^2 u}, \qquad y = y_0 . e^{\beta^2 u}, \qquad z = z_0 e^{\gamma^2 u},$$

α, β, γ *étant des nombres donnés.*

Lorsque le point M (x_0, y_0, z_0) *décrit une courbe directrice* D, *la courbe* C *engendre une surface* S.

1° *Démontrer que si la ligne* D *est ligne asymptotique de* S *on obtient sans signe d'intégration la famille d'asymptotiques contenant* D.

2° *Comment doivent être choisis* α, β, γ *pour que les courbes* C *soient planes. Montrer que, lorsque les courbes* C *sont planes, la recherche de toute directrice* D *asymptotique se ramène aux quadratures.*

3° *Dans le cas général, les directrices* D *asymptotiques peuvent être obtenues à l'aide des solutions de trois équations linéaires et homogènes analogues.*

On prend en particulier une courbe D

$$x_0 = f(v), \qquad y_0 = \varphi(v), \qquad z_0 = \psi(v),$$

telle que l'on ait

$$f'' + \alpha^2 f = 0, \qquad \varphi'' + \beta^2 \varphi = 0, \qquad \psi'' + \gamma^2 \psi = 0,$$
$$f'(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = 0, \qquad \psi'(0) = 0,$$

et l'on demande de rechercher si les lignes asymptotiques de la surface S *de la famille* D *ont une enveloppe.*

Quelles sont les particularités de cette enveloppe relativement aux asymptotiques et à la surface S?

Examiner le cas où α, β, γ *deviennent des nombres entiers.*

(Octobre 1911.)

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première question. — *Étant donnée une équation aux différentielles totales* complètement intégrable :

$$(1)\qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

où P, Q, R *sont des fonctions homogènes des variables* x, y, z, *du même degré d'homogénéité, démontrer que l'expression*

$$\mu = \frac{1}{Px + Qy + Rz}$$

est un facteur intégrant pour le premier membre de l'équation (1), *à moins que* $Px + Qy + Rz$ *ne soit nul. Dans ce dernier cas les surfaces intégrales de l'équation* (1) *sont des cônes, qui s'obtiennent par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre.*

Application. — *Montrer que les courbes gauches représentées en coordonnées rectangulaires par le système des deux équations*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a, \qquad xyz^\alpha = b,$$

où α *est une constante donnée,* a *et* b *deux paramètres variables, sont les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces, et trouver ces surfaces.*

Deuxième question. — *Démontrer que la fonction*

$$y(x) = \frac{1}{6}\int_{x_0}^{x} [\sin(x-\alpha)]^3 f(\alpha)\,d\alpha,$$

où x_0 est une constante donnée, est une intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre

$$F(y) = a_0 \frac{d^4 y}{dx^4} + a_1 \frac{d^3 y}{dx^3} + \ldots + a_4 y = f(x),$$

dont les coefficients sont indépendants de la forme de la fonction $f(x)$.

Trouver l'intégrale générale de cette équation.

Peut-on étendre cette propriété à l'expression plus générale

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} [\sin(x-\alpha)]^{n-2} f(\alpha)\, d\alpha,$$

n étant un nombre entier quelconque.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la surface* S *lieu du point dont les coordonnées rectangulaires x, y, z sont données par les formules*

$$x = 3u + 3uv^2 + u^3,$$
$$y = 3v + 3u^2 v - v^3$$
$$z = 3u^2 - 3v^2$$

dans lesquelles u et v sont deux paramètres variables satisfaisant aux conditions

$$v \leqq u \leqq 1, \qquad 0 \leqq v \leqq 1.$$

Calculer l'aire de cette surface S, *ainsi que le volume de la partie de l'espace limitée par* S. *par le cylindre projetant le contour de* S *sur le plan* Oxz, *et par le plan* Oxz. (Juillet 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première question. — *Soient* Ox, Oy, Oz *trois axes de coordonnées rectangulaires* M, *un point d'une surface* S, T *le point où le plan tangent en* M *rencontre l'axe* Oz. *On demande :*

1° *Trouver l'équation générale des surfaces* S *telles que l'on ait*

$$OM = OT;$$

2° *Déterminer les surfaces* S *qui passent par l'hyperbole représentée par les deux équations*

$$x = 1, \qquad 2yz = 1;$$

3° *Démontrer qu'il existe une infinité de surfaces* S *tangentes à un plan quelconque* P, *et qu'il en existe une qui est tangente au plan* P *en tous les points d'une courbe.*

N. B. — *On remarquera pour l'intégration que l'équation aux dérivées partielles des surfaces* S *se décompose en deux équations linéaires en* p *et* q.

Deuxième question. — *Trouver l'expression générale des fonctions analytiques*

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

de la variable complexe $z = x + iy$, *telles que la partie réelle* $P(x, y)$ *est le produit d'une fonction* X *de* x *par une fonction* Y *de* y.

On demande de choisir les constantes dont dépend cette fonction $f(z)$ *de façon que les racines de l'équation* $f(z) = 1$ *soient les nombres de la forme* $n\pi i$, *où* n *est un nombre entier, chacune d'elles étant une racine double.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale double*

$$\iint \rho\sqrt{4 - \rho^2}\, d\rho\, d\theta$$

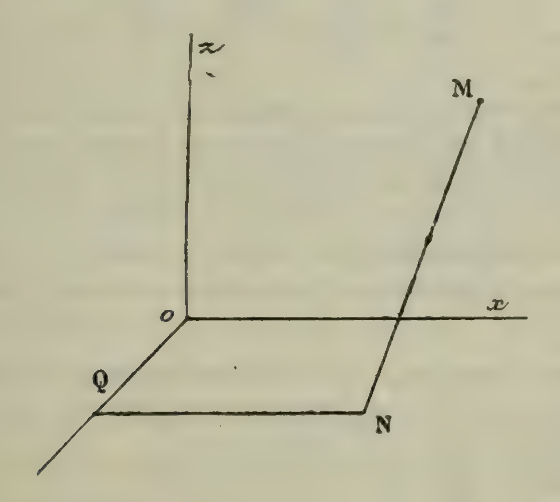
étendue à l'aire intérieure à l'ellipse

$$\rho = \frac{4 \sin\theta}{1 + \sin^2\theta}.$$

Nota. — *Après avoir effectué l'intégration en* $d\rho$, *on pourra utiliser la méthode des résidus.*

(Octobre 1911.)

Épreuve théorique. — Première question. — *Soient* Ox, Oy, Oz *trois axes de coordonnées rectangulaires*, M *un point d'une surface* S, N *le point d'intersection de la normale en* M *avec le plan* xOy. *On demande de déterminer les surfaces* S *telles que la longueur* MN *soit égale à la distance du point* N *à l'axe* Oy.



Trouver les surfaces de cette espèce qui passent par le cercle représenté par les deux équations

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

Démontrer que les caractéristiques sont des lignes de courbure des surfaces S *et que la seconde famille de lignes de courbure est formée de courbes planes dont le plan passe par l'axe* Oy.

N. B. — *Pour intégrer l'équation aux dérivées partielles des surfaces* S, *on pourra commencer par démontrer que les caractéristiques sont des courbes planes, dont les plans sont parallèles à l'axe* Oz.

Deuxième question. — *Soit* $\mu(x, y)$ *un facteur intégrant*

pour l'équation différentielle du premier ordre

$$dy - f(x, y)\,dx = 0. \tag{1}$$

Démontrer que la fonction

$$v(x, y) = \frac{\partial \log \mu}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y}$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial v}{\partial x} + f\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \tag{2}$$

et qu'inversement de toute intégrale de l'équation (2) *on peut déduire un facteur intégrant pour l'équation* (1).

Trouver la forme que doit avoir la fonction $f(x, y)$ *pour que l'équation* (2) *admette une intégrale particulière* $v = X$, *ne dépendant que de la variable* x. *En déduire l'intégrale générale de l'équation correspondante* (1).

Épreuve pratique. — C *étant une circonférence donnée, on désigne par* A *et* A' *les points de contact des tangentes à* C *issues d'un point extérieur* M.

Démontrer que l'intégrale double

$$I = \iint_D \frac{|\sin \widehat{AMA'}|}{\overline{AM}^2}\,dm,$$

dans laquelle dm *désigne l'élément d'aire décrit par* m, *a une valeur finie quand on l'étend à un domaine* D *extérieur à* C, *que* D *s'étende ou non à l'infini, qu'il atteigne ou non le contour* C.

Calculer I *quand on prend pour domaine* D *successivement chacune des cinq régions en lesquelles deux tangentes à* C *faisant entre elles un angle donné* α *divisent la partie du plan extérieure à* C.

(Juillet 1912.)

CARLO BOURLET.

Carlo Bourlet, né à Strasbourg le 26 avril 1866, se signala de bonne heure par ses aptitudes scientifiques. En 1885, il était reçu second à l'École Normale supérieure et premier à l'École Polytechnique, où sa note moyenne dépassait, croyons-nous, toutes celles qu'on avait recensées depuis le premier concours. Par goût pour l'enseignement, il opta pour l'École Normale. Il en sortait, trois ans plus tard, premier agrégé des sciences mathématiques. Enfin, en 1891, il obtenait, avec toutes boules blanches, le titre de docteur ès sciences par une thèse remarquable *sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues*. Par ce beau travail il établissait, dans les conditions les plus générales, l'existence des intégrales des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Cauchy, Sonia Kowalewski et d'autres géomètres n'avaient, avant lui, traité que des cas particuliers du problème.

Jusque vers 1900, Bourlet continua à publier des travaux de mathématiques pures. Les plus importants concernent les *transmutations*, c'est-à-dire les opérations qui font correspondre une fonction à une autre. Le sujet touche de près à la théorie des fonctions de lignes et à celle des équations intégrales, et les auteurs qui s'occupent de ces doctrines récentes mentionnent avec éloges les résultats importants obte-

nus par Bourlet il y a une vingtaine d'années [1]. Nul doute que, s'il eût persévéré dans la voie des recherches analytiques, son nom ne fût attaché, d'une façon encore plus intime, à l'une des plus belles conquêtes de la science contemporaine.

Mais, de bonne heure, les mathématiques appliquées l'avaient attiré. Une fois qu'il eut établi son aptitude à poursuivre des études abstraites, il suivit son goût et tourna ses efforts vers la Mécanique. C'était l'époque où les progrès rapides de la bicyclette provoquaient l'enthousiasme général. Bourlet fut un fervent cycliste, comme presque tous les jeunes hommes de ce temps, mais son ardeur ne fut pas seulement sportive. Il reconnut dans le nouvel instrument l'origine d'une foule de problèmes aussi intéressants en eux-mêmes que par leurs conséquences pratiques. Ces problèmes étaient nouveaux pour la plupart, et Bourlet connut la joie des chercheurs qui s'engagent dans une voie inexplorée. Il utilisa le calcul et l'expérience. Il étudia les principes de l'équilibre dynamique de la bicyclette, l'influence des résistances diverses qu'elle éprouve au cours de son mouvement, le rendement de ses transmissions, etc. Les résultats de ses recherches, publiés d'abord dans des revues techniques, furent partiellement condensés en trois volumes, parus de 1894 à 1899. Deux d'entre eux forment le *Nouveau Traité des bicycles et bicyclettes*, qui fait partie de *l'Encyclopédie des Aide-Mémoire* et que l'Académie des Sciences couronna en 1899 du prix Fourneyron. Le troisième, intitulé *La Bicyclette, sa construction et sa*

---

(1) *Voir* par exemple l'article de M. Maximilien Winter : *Les principes du calcul fonctionnel.* (*Revue de Métaphysique et de Morale*, juillet 1913.)

forme, paraît constituer encore aujourd'hui l'Ouvrage le plus complet que l'on ait consacré à la description des divers organes de la bicyclette et à l'étude critique des systèmes imaginés par les constructeurs.

Un des problèmes les plus importants résolus par Bourlet concerne la construction rationnelle des pistes de vélodromes, dont les virages étaient, jusqu'à lui, établis d'une manière défectueuse. Il utilisa ingénieusement à cet effet la *courbe de Cornu*, qu'on appelle aussi *clothoïde*. Les principes et les formules qu'il a fait connaître ont été depuis universellement appliqués.

Le rôle que Bourlet a joué dans le développement de la bicyclette ne s'est pas borné là. Le travail de cabinet et les expériences de laboratoire ne suffisaient à satisfaire, ni son besoin d'action, ni son goût de la réalité. C'est ainsi, par exemple, qu'avec l'aide du Touring-Club de France, il organisa ces concours de freins qui mirent en évidence, après bien des discussions, la supériorité de la roue libre et du frein sur jante.

A son mérite exceptionnel Bourlet avait dû le rare privilège d'être attaché, dès sa sortie de l'École Normale, à un lycée de Paris. Il enseigna successivement au Lycée Henri-IV (1891-1897), au Lycée Saint-Louis (1897-1906), où il occupait une chaire de mathématiques spéciales. Il fut aussi chargé à la Sorbonne, à titre de suppléant, du cours d'Éléments d'Analyse et de Mécanique (1899-1900), membre du jury d'agrégation (1900-1903), professeur à l'École des Beaux-Arts du cours de Mathématiques et Statique graphique (depuis 1896). Mais, de même qu'il avait fait de la Mécanique appliquée l'objet à peu près exclusif de ses études, il rêvait de l'enseigner. Ce rêve fut enfin réalisé par sa nomination au Conservatoire national des Arts et

Métiers, où il succéda, en 1906, à Eugène Rouché. Il y traitait de la Cinématique, de la Statique graphique et de la Dynamique. Son cours obtint dès le premier jour un succès éclatant, et l'amphithéâtre eut bientôt peine à contenir les auditeurs qui s'y pressaient par centaines.

Bourlet projetait de publier ses cours. Il n'a malheureusement eu le temps de donner qu'un petit traité de Statique graphique, dont l'originalité et la clarté parfaite font profondément regretter l'absence de l'Ouvrage plus étendu qu'il promettait dans sa préface.

Ses Livres d'enseignement élémentaire sont bien connus et leurs nombreuses éditions attestent la faveur qu'ils ont reçue du public.

Il collaborait à la direction des *Nouvelles Annales de Mathématiques* depuis 1903.

Enfin, dans ce résumé trop rapide de la carrière de Bourlet, comment omettre de parler de son dévouement passionné et désintéressé à la cause de la langue internationale Esperanto, à laquelle, pendant plus de 10 ans, il a peut-être donné le meilleur de lui-même? L'existence de la langue créée par le Dr Zamenhof lui fut révélée vers 1900 par l'éminent mathématicien Charles Méray. Du premier coup, Bourlet mesura la portée scientifique et sociale de cette invention et résolut de consacrer toutes ses forces à la répandre. L'Esperanto ne comptait encore que de rares adeptes. Avec une ardeur inlassable, Bourlet parcourut la France pour y faire des conférences de propagande, soulevant partout l'enthousiasme par son éloquence à la fois enflammée et précise, fonda dans toutes les villes où il passait des sociétés et des groupes, organisa des congrès et donna à l'Esperanto une impulsion qui ne s'est pas ralentie. Dans cette longue campagne, Bourlet mit en lumière

une nouvelle faculté maîtresse, celle de conducteur d'hommes, et il l'exerçait avec la même aisance qu'il avait autrefois poursuivi les recherches analytiques les plus abstraites.

Il eut une fin tragique : se trouvant en villégiature sur les bords du lac d'Annecy, il avala un fragment de cartilage de poisson, qui lui blessa l'œsophage et détermina un abcès dont il mourut après douze jours des plus cruelles souffrances, le 12 août 1913, entre les bras de ceux qu'il chérissait.

Son intelligence était vive, vaste et complète. Les aptitudes spéculatives et le sens des nécessités pratiques y vivaient en parfait équilibre. Avec une promptitude véritablement merveilleuse, il savait trouver le point de vue d'où il convient d'examiner toute question nouvelle. Aussi sa perte est-elle déplorée dans tous les milieux où s'est exercée son activité. Il laisse aussi un grand vide parmi ses proches et ses amis : car Bourlet vécut entouré de ces profondes et fidèles affections qui ne vont qu'aux natures généreuses. Tous ceux qui l'ont approché ont reçu des marques de son dévouement. Cet homme qui ne connaissait presque pas le loisir sut toujours arracher au travail le temps de rendre un service.

On peut dire sans paradoxe qu'avec des dons moins variés, Bourlet aurait occupé une place encore plus haute dans la Science. La valeur de ses premiers travaux ne permet pas d'en douter. Mais il ne put supporter de vivre dans la tour d'ivoire, et, bien que fort apte au recueillement fécond, il voulut agir. C'est pourquoi son œuvre se trouve autant dans ses actes d'organisateur et de propagandiste que dans ses travaux imprimés. Il y aura moins de « théorèmes de Bourlet » que ne le faisaient espérer ses brillants débuts. Aux yeux

de ceux qui ont subi sa puissante influence et qui conservent de lui le plus vivant souvenir, cela ne diminue pas la beauté et l'utilité de sa courte existence.

Raoul Bricard.

[O¹2p]

SUR LES ROULETTES CIRCULAIRES;

Par M. F. GOMES TEIXEIRA.

1. Le problème qui a pour objet de déterminer la courbe sur laquelle doit rouler une autre courbe donnée pour qu'un point du plan de la seconde courbe décrive une droite a été résolu complètement par M. Haton de la Goupillière dans le Mémoire remarquable qu'il a consacré à la théorie des roulettes. Mais je crois qu'on n'a pas encore considéré ce problème analogue :

Déterminer la courbe C_2 sur laquelle doit rouler une autre C_1 pour que la roulette décrite par un point du plan de celle-ci soit une circonférence.

Je vais donc m'occuper de cette question.

Rapportons la courbe roulante à un système de coordonnées (θ, ρ) polaires ayant pour pôle le point décrivant M et la courbe fixe ainsi que la roulette à un autre système de coordonnées polaires (ρ_1, θ_1) ayant pour pôle le centre du cercle donné.

En appliquant le théorème de Descartes sur les normales aux roulettes, on trouve évidemment

$$\rho_1 = \rho + a,$$

a désignant le rayon du cercle et ρ et ρ_1 les distances respectives du point décrivant M et du centre du cercle au point de contact N de C_1 et C_2 On a aussi, par la condition de roulement,

$$d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 = d\rho_1^2 + \rho_1^2\, d\theta_1^2,$$

et par conséquent

$$(\rho_1 - a)^2\, d\theta^2 = \rho_1^2\, d\theta_1^2.$$

Donc, en supposant que l'équation de la courbe roulante est

$$(1) \qquad \theta = f(\rho),$$

on voit que la courbe fixe doit vérifier l'équation différentielle

$$(2) \qquad d\theta_1 = \frac{\rho_1 - a}{\rho_1} f'(\rho_1 - a)\, d\rho_1.$$

Réciproquement, la courbe (1) peut rouler sur une courbe définie par l'équation (2) de manière que le pôle de la première décrive une circonférence.

Nous avons, en effet, par la condition de roulement, la relation

$$d\rho^2 + \rho^2 f'^2(\rho)\, d\rho^2 = d\rho_1^2 + (\rho_1 - a)^2 f'^2(\rho_1 - a)\, d\rho_1^2,$$

à laquelle on satisfait évidemment en faisant $\rho = \rho_1 - a$.

On a aussi, à cause du théorème de Descartes,

$$(3) \qquad \begin{aligned} (X - x)^2 + (Y - y)^2 &= (\rho_1 - a)^2, \\ (X - x)\, dx + (Y - y)\, dy &= 0, \end{aligned}$$

X, Y étant les coordonnées cartésiennes du point décrivant et x, y celles du point de contact des courbes C_1 et C_2, rapportées au centre du cercle, comme origine; et, en différentiant la première équation et en

tenant compte de la deuxième, on trouve

$$(4)\qquad (X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = -(\rho_1 - a)\,d\rho_1.$$

Nous allons maintenant montrer que les valeurs de X et Y, qui vérifient cette équation et l'équation (3), vérifient aussi celle-ci :

$$X^2 + Y^2 = a^2.$$

Pour cela, remarquons que, en vertu de cette équation, l'équation (3) devient

$$(5)\qquad xX + yY = a\rho_1,$$

et que, en posant $x = \rho_1 \cos\theta_1$, $y = \rho_1 \sin\theta_1$ et en tenant compte de (2), on a

$$dx = [\cos\theta_1 - (\rho_1 - a)\,f'(\rho_1 - a)\sin\theta_1]\,d\rho_1,$$
$$dy = [\sin\theta_1 + (\rho_1 - a)\,f'(\rho_1 - a)\cos\theta_1]\,d\rho_1,$$

et par conséquent

$$x\,dx + y\,dy = \rho_1\,d\rho_1,$$
$$x\,dy - y\,dx = \rho_1(\rho_1 - a)\,f'(\rho_1 - a)\,d\rho_1.$$

Les équations (4) et (5) donnent donc

$$X = \frac{a\rho_1\,dy - y\,[(x\,dx + y\,dy) - (\rho_1 - a)\,d\rho_1]}{x\,dy - y\,dx} = a\cos\theta_1,$$
$$Y = \frac{x\,[x\,dy + y\,dx - (\rho_1 - a)\,d\rho_1] - a\rho_1\,dx}{x\,dy - y\,dx} = a\sin\theta_1.$$

Or ces valeurs de X et Y vérifient l'équation

$$X^2 + Y^2 = a^2,$$

et le théorème est démontré.

2. Pour faire une première application de cette doctrine, nous allons considérer le cas où la ligne roulante

se réduit à une droite représentée par l'équation

$$\rho = \frac{h}{\cos\theta}.$$

L'équation (2) donne alors

$$\theta_1 = h\int\frac{d\rho_1}{\rho_1\sqrt{(\rho_1 - a)^2 - h^2}},$$

résultat identique à celui qui a été obtenu par M. Kœnigs dans ses *Leçons de Cinématique* (1897, p. 170).

Nous ajouterons que cette équation est identique à celle que nous avons obtenue en complétant la solution d'un problème de Descartes dans le Tome II, page 243, de notre *Traité des courbes spéciales*.

3. Considérons encore le cas où la courbe roulante est une circonférence et le point décrivant un point de cette circonférence.

L'équation polaire de cette ligne rapportée à un de ses points, comme pôle, est

$$\rho = h\cos\theta,$$

et, par conséquent, en appliquant la formule (2), on voit que l'équation de la base de la roulette est

$$\theta_1 = \int\frac{(\rho_1 - a)\,d\rho_1}{\rho_1\sqrt{h^2 - (\rho_1 - a)^2}}.$$

La classe de courbes définie par cette équation est identique à une classe de courbes rencontrée par Euler dans ses recherches sur les lignes rectifiables par des arcs de cercle dans le Tome XI des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg* (voir notre *Traité de courbes spéciales*, t. II, p. 292).

[M¹5b]

SUR LES ELLIPSES TRITANGENTES A L'HYPOCYCLOIDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

M. J. Lemaire a étudié (*Nouvelles Annales*, 1913, p. 126) les ellipses tritangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements. Les développements suivants conduiront à d'autres propriétés des mêmes coniques.

1. Considérons, dans le plan d'un triangle ABC, un point P autour duquel pivote une droite m. Cette droite rencontre le cercle circonscrit au triangle en deux points dont les droites de Simson se coupent en un point M, orthopôle de m. Le point M décrit une conique Ω (¹).

En plaçant la droite m perpendiculairement et parallèlement aux côtés du triangle ABC, on verra aisément que la conique Ω passe par les projections de P sur les côtés du triangle et que le centre γ de cette conique est le milieu de la droite qui joint l'orthocentre H du triangle au point P.

Nous allons montrer que *la conique Ω est tritangente à l'hypocycloïde de Steiner du triangle* ABC.

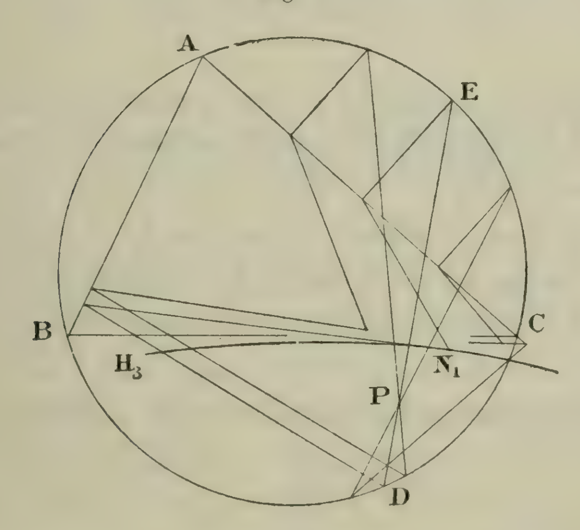
Soient, en effet, R_1, R_2, R_3 les points de rebroussements de cette hypocycloïde H_3. Prenons sur l'arc R_2R_3 un point N_1; la tangente à H_3 en ce point est la droite de Simson, par rapport au triangle ABC, d'un point D

(¹) *Voir*, par exemple, J. Neuberg, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, juillet-août 1910.

du cercle ABC. La tangente adjointe est la droite de Simson d'un point E.

Prenons de même sur l'arc $R_1 R_3$ un point N_2; la tangente à H_3 en ce point et la tangente adjointe sont les droites de Simson des points F et K. Soit P le point d'intersection des cordes DE, FK; les points N_1 et N_2 sont des points de la conique Ω relative au point P. Dès lors, si l'on considère, de part et d'autre de DE, une corde voisine, on voit (*fig.* 1) que les points de la

Fig. 1.



conique Ω correspondant à ces cordes sont nécessairement situés du même côté de l'arc $R_2 R_3$. Les points N_1, N_2 sont donc des points de contact de l'hypocycloïde avec Ω; par suite, en vertu d'un théorème connu, la conique Ω est tangente à H_3 en un troisième point.

2. Ceci posé, considérons une H_3 et la série de ses triangles T qui admettent H_3 comme hypocycloïde de Steiner.

Une ellipse, de centre donné γ, tritangente à H_3, touche H_3 en N_1, N_2, N_3; on sait que les normales en

ces points sont concourantes. Les propriétés qui précèdent permettent de généraliser ce théorème. Soit, en effet, un triangle T quelconque; le symétrique de son orthocentre H par rapport à γ est tel que ses projections sur les côtés du triangle T appartiennent à Ω; d'où le théorème :

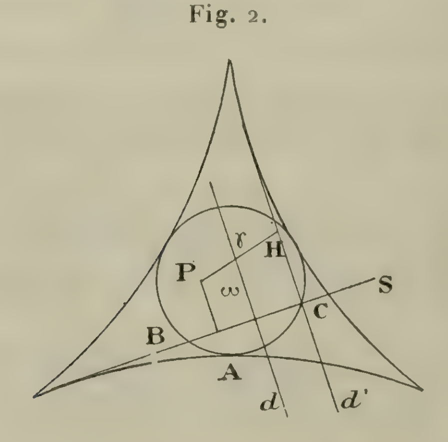
Une ellipse tritangente coupe les côtés d'un triangle T *quelconque en six points dont trois sont tels que les perpendiculaires élevées en ces points sur les côtés du triangle* T *concourent en un même point.*

Ce point de rencontre est le symétrique de l'orthocentre du triangle T par rapport au centre de la conique tritangente.

On sait que le triangle formé par les tangentes à H_3 en N_1, N_2, N_3 est un triangle T; on voit donc que les normales à H_3 en ces points sont concourantes.

3. Supposons maintenant que le centre γ d'une

Fig. 2.



ellipse tritangente à une H_3 se déplace sur une droite d (*fig.* 2). Considérons la tangente d' à H_3 parallèle à d,

et la tangente s perpendiculaire à d. Il existe une infinité de triangles T dont d' est une hauteur ; tous ces triangles ont un côté commun s. Le symétrique de l'orthocentre du triangle T par rapport à γ décrit une parallèle à d. Par conséquent, la projection de ce point sur le côté s des triangles T considérés est un point fixe.

On arrive ainsi au théorème suivant :

Lorsque le centre d'une ellipse tritangente à une H_3 *décrit une droite, cette ellipse passe par un point fixe.*

Ce point fixe appartient à la tangente à l'hypocycloïde perpendiculaire à la droite considérée.

4. Les propriétés énoncées au paragraphe 1 conduisent encore à une construction simple des ellipses tritangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements.

Reprenons la définition fondamentale de l'hypocycloïde : soient (*fig.* 2), sur un cercle fixe ω, un point fixe A et deux points mobiles B et C tels que

$$\text{arc AC} = 2 \,\text{arc AB}.$$

Si l'on observe que C est la projection sur BC de l'orthocentre de l'un quelconque des triangles T dont un des côtés coïncide, en alignement, avec BC, on peut dire que l'*ellipse de centre donné* γ *tritangente à* H_3 *est le lieu du symétrique de* C *par rapport à la projection de* γ *sur* BC.

Cette propriété permet de tracer, en même temps, une hypocycloïde à trois rebroussements et l'ellipse de centre donné qui lui est tritangente.

[K¹12bα]

SUR LE PROBLÈME D'APOLLONIUS;

Par M. R. BOUVAIST,
Enseigne de vaisseau.

Laguerre a déduit une solution du problème d'Apollonius (*Mener un cercle tangent à trois cercles donnés*) de la proposition suivante : *Si trois cycles sont tels que leur axe de similitude ne coupe aucun d'eux, on peut, au moyen d'une transformation par semi-droites réciproques, les transformer en trois points.* De cette proposition on peut rapprocher celle-ci : *Étant donnés trois cercles, on peut, au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques, les transformer en trois cercles égaux.* Je me propose de montrer que cette dernière proposition peut, elle aussi, conduire à une solution du problème d'Appollonius.

1° Détermination des pôles d'inversion permettant de transformer trois cercles donnés en trois cercles égaux. — On sait que, pour que les inverses de deux cercles donnés par rapport à un point P soient égaux, il faut et il suffit que les puissances du point P par rapport à chacun de ces cercles soient respectivement proportionnelles au rayon de ces cercles. Comme, d'autre part, le lieu des points, tels que leurs puissances par rapport à deux cercles donnés soient dans un rapport donné, se compose de deux cercles ayant pour centres les points partageant la ligne des centres des deux cercles dans le rapport donné et passant par l'intersec-

tion des cercles considérés, nous sommes conduits au résultat suivant :

Étant donnés trois cercles C_1, C_2, C_3 *de rayons* R_1, R_2, R_3, *les pôles d'inversion par rapport auxquels* C_1, C_2, C_3 *se transforment en trois cercles égaux, sont les quatre couples de points intersections des cercles*

$$\frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2} = \frac{C_3}{R_3},$$
$$\frac{C_1}{-R_1} = \frac{C_2}{R_2} = \frac{C_3}{R_3},$$
$$\frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{-R_2} = \frac{C_3}{R_3},$$
$$\frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2} = \frac{C_3}{-R_3};$$

ou encore, en désignant par S_{12}, S_{23}, S_{31}, S'_{12}, S'_{23}, S'_{31} les centres de similitude des trois cercles C_1, C_2, C_3 :

Les cercles ayant pour centre trois des centres de similitude situés sur un même axe de similitude, S_{12}, S_{23}, S_{31} *par exemple, en passant respectivement par l'intersection des cercles* $C_1 C_2$, $C_2 C_3$, $C_3 C_1$ *se coupent en deux points qui sont tels qu'en les prenant pour pôles d'inversion, les inverses des cercles* C_1, C_2, C_3 *sont égaux.*

2° Condition de réalité des pôles permettant de transformer trois cercles donnés en trois cercles égaux. — Soient, par exemple, P_1 et P_2 les deux pôles situés sur une perpendiculaire à l'axe de similitude S_{12}, S_{23}, S_{31}, et soit R le centre radical des cercles C_1, C_2, C_3 ; les points P_1 et P_2 sont déterminés par l'intersection des cercles

$$C_1 + \lambda C_3 = \Gamma_2, \qquad C_1 + \lambda C_2 = \Gamma_1;$$

le point R a même puissance d'une part par rapport aux cercles C_1, C_2, Γ_2, d'autre part par rapport aux cercles C_1, C_3, Γ_1 ; la droite $P_1 P_2$ passe donc par R, donc :

Les pôles permettant de transformer trois cercles C_1, C_2, C_3 *en trois cercles égaux forment quatre couples situés sur les perpendiculaires abaissées du centre radical de* C_1, C_2, C_3 *sur les axes de similitude de ces cercles.*

Nous avons de plus

$$RP_1 \times RP_2 = k^2$$

(k^2 étant le rayon du cercle orthotomique de C_1, C_2, C_3), ou, en désignant par I l'intersection de $P_1 P_2$ avec $S_{12} S_{23} S_{13}$,

$$RP_1 \times RP_2 = \overline{RI}^2 - \overline{IP}_1^2 = k^2,$$

les points de P_1 et P_2 seront donc réels si $\overline{RI}^2 > k^2$, c'est-à-dire si l'axe de similitude $S_{12} S_{23} S_{13}$ ne coupe pas le cercle orthotomique, donc :

On aura, sur la perpendiculaire abaissée du centre radical de R *de* C_1, C_2, C_3 *sur l'un des axes de similitude, deux pôles réels permettant de transformer* C_1, C_2, C_3 *en trois cercles égaux, si l'axe considéré ne coupe pas le cercle orthotomique de* C_1, C_2, C_3.

Remarque. — J'ai cru bon d'insister sur la détermination des pôles permettant de transformer trois cercles donnés en trois cercles égaux, car bien que l'existence de ces pôles soit un fait bien connu, les Traités classiques ne les signalent pas, me semble-t-il, avec toute la précision désirable. C'est ainsi qu'on peut lire dans le *Traité de Géométrie* de Rouché et de

Comberousse (t. I, p. 191) : « On peut, en général, trouver *un* centre d'inversion, tel que trois cercles donnés se transforment en trois cercles égaux. »

Problème d'Apollonius. — Soient C_1, C_2, C_3 les trois cercles donnés, P un pôle d'inversion, permettant de transformer les trois cercles en trois cercles égaux; O_1, O_2, O_3 les centres de C_1, C_2, C_3.

Prenons comme puissance d'inversion la puissance de P par rapport à C_1, le centre C_1 se transforme en lui-même, C_2 et C_3 deviennent les cercles C'_2 et C'_3 de centres O'_2, O'_3.

Soit ω le centre du cercle circonscrit au triangle O, O'_2, O'_3. Cherchons les cercles tangents à C_1, C'_2, C'_3.

Nous avons immédiatement deux solutions, les deux cercles de centre ω et de rayons $\omega O_1 \pm R_1$ (R_1 étant le rayon commun de C_1, C'_2, C'_3). Soient Δ la perpendiculaire au milieu de OO'_2, M_1 et M_2 les points d'intersection de Δ avec l'hyperbole de foyers O'_2 et O'_3 ayant pour longueur d'axe focal $2R_1$.

Nous aurons

$$O'_3 M_1 - O'_2 M_1 = 2R_1 \quad \text{ou} \quad O'_3 M_1 - R_1 = O'_2 M_1 + R_1 = \rho_1,$$

ce qui montre que le cercle de centre M_1 et de rayon ρ_1 est tangent aux trois cercles C_1, C'_2, C'_3; nous aurons ainsi sur chacune des perpendiculaires élevées au milieu des côtés du triangle O, O'_2, O'_3, deux points centres de cercles tangents aux trois cercles C_1, C_2, C_3. Les points tels que M_1 et M_2 se déterminent par la construction classique; M_1 et M_2, par exemple, sont les centres des cercles passant par O'_2 et O_1 et tangents au cercle de centre O'_3 et de rayon $2R_1$.

Nous obtiendrons ainsi individuellement les huit solutions du problème et, en revenant à la figure primitive, les huit cercles tangents à C_1, C_2, C_3.

Remarque. — Considérons les deux cercles ayant pour centre commun le centre du cercle circonscrit au triangle O, O'_2, O'_3 ; ces deux cercles sont orthogonaux aux perpendiculaires élevées aux milieux des côtés du triangle O, O'_2, O'_3, qui sont les axes radicaux des cercles C_1, C'_2, C'_3 pris deux à deux ; en revenant à la figure primitive, nous voyons que les deux cercles Γ_1 et Γ_2 transformés de ces cercles sont orthogonaux aux cercles passant par P et les intersections des cercles C_1, C_2, C_3 pris deux à deux, c'est-à-dire orthogonaux au faisceau de cercles passant par les points P et P′, P′ étant le symétrique de P par rapport à l'axe de similitude de C_1, C_2, C_3 auquel la droite RP est perpendiculaire (R désignant comme plus haut le centre radical de C_1, C_2, C_3). Γ_1 et Γ_2 appartiennent donc au faisceau formé par les cercles ayant leurs centres sur RP et orthogonaux au cercle de diamètre PP′. Nous avons vu plus haut qu'on a

$$\mathrm{RP} - \mathrm{RP}' = k^2,$$

k étant le rayon du cercle orthotomique de C_1, C_2, C_3 ; cette relation montre que ce cercle orthotomique appartient au même faisceau que Γ_1 et Γ_2, d'où la proposition suivante :

Les cercles tangents à trois cercles donnés forment quatre groupes de deux cercles. Deux cercles formant un groupe appartiennent au faisceau de cercles déterminés par le cercle orthotomique des trois cercles donnés et l'un de leurs axes de similitude.

Cette proposition ramène donc le problème d'Apollonius à un problème tout à fait élémentaire : « Mener un cercle tangent à un cercle donné et passant par deux points donnés ».

Les propositions précédentes s'appliquent sans modification à un système de quatre sphères, et l'on peut dire que :

Les seize sphères tangentes à quatre sphères données forment huit groupes de deux sphères, deux sphères d'un même groupe appartiennent au faisceau déterminé par la sphère orthotomique des quatre sphères données et l'un de leurs huit plans de similitude.

[O'5f]

SUR LES MÉTACENTRES ET LES PARAMÈTRES DE DISTRIBUTION DES COURBES D'UNE SURFACE;

Par M. Ch. PLATRIER,
Docteur ès sciences mathématiques.

1. On appelle *normalie* relative à une courbe C d'une surface S la surface réglée N lieu des normales G menées à S par les points M de C.

On appelle *métacentre* de la courbe C en un point M le point central γ de la génératrice G de la normalie N.

La distance $\mu = M\gamma$ et son inverse $\frac{1}{\mu}$ sont respectivement le *rayon de courbure métacentrique* et la *courbure métacentrique* de C en M. Rappelons que ces quantités ne dépendent que des éléments du premier ordre de la surface et sont les mêmes pour deux courbes C de S ayant en M même tangente Mt. Le *paramètre de distribution* K de la génératrice G de la normalie N jouit également de ces propriétés. Nous

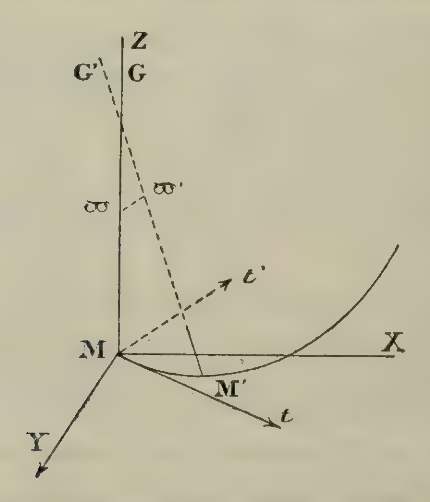
dirons donc indifféremment dans la suite que, en M, les quantités μ, $\frac{1}{\mu}$, K sont relatives à la direction Mt ou relatives à la courbe C de S tangente à Mt.

Dans plusieurs questions de Mécanique, et notamment dans l'étude de l'équilibre d'un corps flottant, les notions de métacentre et de paramètre de distribution sont avantageusement substituées aux notions de courbure normale et de torsion géodésique.

Je me propose ici de reprendre et compléter certains résultats déjà acquis concernant les métacentres et les paramètres de distribution. J'insisterai particulièrement sur les relations qui existent d'une part entre la courbure normale et la courbure métacentrique, d'autre part entre la torsion géodésique et le paramètre de distribution.

2. Calculons μ et K.

On sait que le point central γ peut être défini comme limite du pied ϖ sur G de la perpendiculaire com-



mune $\varpi\varpi'$ à G et à la génératrice rectiligne G' de N infiniment voisine de G.

Rapportons la surface S à un trièdre trirectangle

d'origine M et d'axes MX, MY tangents aux lignes de courbure passant par M.

μ ne dépendant que des éléments du premier ordre, nous pourrons calculer cette longueur en substituant à la surface S le paraboloïde

$$(1) \qquad Z = \frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{R} + \frac{Y^2}{R'}\right),$$

R et R' étant les rayons de courbure principaux de S en M.

G' est normale à S au point M' (x, y, z) de C infiniment voisin de M ; ses équations sont

$$(2) \qquad \frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}$$

et, en vertu de (1), p et q sont, à des infiniment petits près, définis par

$$(3) \qquad p = \frac{x}{R}, \qquad q = \frac{y}{R'}.$$

$\varpi\varpi'$ est parallèle à l'intersection des plans tangents à S en M et M', c'est-à-dire à la direction

$$(3') \qquad pX + qY = 0$$

du plan des XY, dont la position limite quand M' tend vers M est la direction Mt' conjuguée de Mt.

Le Z du point ϖ est le même que celui du point ϖ' et est par suite défini par (2) et (3'), c'est-à-dire égal a

$$z + \frac{px + qy}{p^2 + q^2},$$

Faisons tendre M' vers M et désignons respectivement par φ et φ' les angles de Mt et Mt' avec MX. Le Z du point ϖ tend vers le rayon de courbure métacentrique μ. En tenant compte de (1) et (3), on obtient

donc l'égalité

$$(4) \qquad \mu = RR' \frac{R\sin^2\varphi + R'\cos^2\varphi}{R^2\sin^2\varphi + R'^2\cos^2\varphi},$$

et, comme Mt et Mt' sont des directions conjuguées,

$$(5) \qquad R\sin\varphi\sin\varphi' + R'\cos\varphi\cos\varphi' = 0,$$

si bien que la formule (4) peut s'écrire

$$(6) \qquad \mu = R\sin^2\varphi' + R'\cos^2\varphi'.$$

Remarquons que le plan tangent à la normalie N en γ est la limite du plan M$\varpi\varpi'$ quand M$'$ tend vers M, c'est-à-dire le plan GMt'. Ce plan fait donc avec le plan tangent GMt à la normalie N en M l'angle $(\varphi' - \varphi)$ et une propriété bien connue du paramètre de distribution nous permet d'écrire

$$K = \mu\cot(\varphi' - \varphi);$$

soit, en vertu de (5) et (6),

$$(7) \qquad K = (R - R')\sin\varphi'\cos\varphi'.$$

3. Désignons par ρ'_n et τ'_g les rayons de courbure normale et de torsion géodésique relatifs à la direction Mt'.

Les formules d'Euler et d'O. Bonnet donnent respectivement

$$(8) \qquad \frac{1}{\rho'_n} = \frac{\cos^2\varphi'}{R} + \frac{\sin^2\varphi'}{R'},$$

$$(9) \qquad \tau'_g = (R' - R)\sin\varphi'\cos\varphi'.$$

Les égalités (6) et (7), rapprochées respectivement des égalités (8) et (9), permettent donc d'écrire les

deux relations :

(10) $$\mu \rho'_n = RR',$$

(11) $$K = -\tau'_g,$$

d'où la double proposition suivante :

Soient un point d'une surface et deux directions conjuguées dans le plan tangent en ce point :

1° *Le produit de la courbure métacentrique relative à une de ces directions par la courbure normale relative à l'autre est égal à la courbure totale de la surface au point considéré;*

2° *Le paramètre de distribution relatif à une de ces directions est égal au signe près au rayon de torsion géodésique relatif à l'autre.*

4. De cette proposition fondamentale et des propriétés connues des courbures normales et des torsions géodésiques, on peut déduire des propriétés corrélatives des courbures métacentriques et des paramètres de distribution.

Ainsi, les théorèmes d'Appolonius appliqués à l'indicatrice donnent les relations

(12) $$\begin{cases} \rho_n + \rho'_n = R + R', \\ \rho_n \rho'_n \sin^2\theta = RR', \end{cases}$$

en désignant par ρ_n le rayon de courbure normale relatif à la direction Mt et en posant $\theta = \varphi' - \varphi$.

A ces relations correspondront, en vertu de (10), pour les rayons de courbure métacentrique, les relations

(13) $$\begin{cases} \dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1}{\mu'} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R'}, \\ \dfrac{\sin^2\theta}{\mu\mu'} = \dfrac{1}{RR'}, \end{cases}$$

en désignant par μ' le rayon de courbure métacentrique relatif à la direction Mt'.

5. Nous allons, pour terminer, appliquer la proposition du paragraphe 3 ou plus exactement les formules (6) et (7) à un problème déjà étudié dans le *Journal de l'École Polytechnique* (5e Cahier, 1900, p. 101 et suiv.).

Soient les points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ en nombre quelconque n décrivant respectivement d'une manière continue n surfaces $S_1, S_2, \ldots, S_n$, de telle façon qu'à chaque instant les plans tangents à ces surfaces aux points considérés restent parallèles.

Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres positifs ou négatifs dont la somme a n'est pas nulle et considérons le centre M des moyennes distances des masses $a_1, a_2, \ldots, a_n$ placées aux points $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Ce point décrit une surface S.

La surface S a en M son plan tangent P parallèle aux plans tangents aux surfaces $S_1, S_2, \ldots, S_n$ aux points respectifs $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Soient, en effet, M', $M'_1, \ldots, M'_n$, $n+1$ points appartenant respectivement à $S, S_1, \ldots, S_n$ et qui se correspondent; supposons-les en outre infiniment voisins des points respectifs M, $M_1, \ldots, M_n$. Projetons sur une droite quelconque les segments MM', $M_1M'_1, \ldots, M_nM'_n$:

$$(14) \quad a\,pr.MM' = a_1\,pr.M_1M'_1 + a_2\,pr.M_2M'_2 + \ldots + a_n\,pr.M_nM'_n.$$

Si, en particulier, on choisit comme axe de projection une perpendiculaire au plan P, tous les termes du second membre sont nuls et, par suite, la projection de MM' est nulle, ce qui démontre que S correspond à $S_1, S_2, \ldots, S_n$ par plans tangents parallèles.

Rappelons que, si deux surfaces S_1, S_2 se corres-

pondent par plans tangents parallèles, deux directions $M_1 t_1$, $M_2 t_2$ correspondantes dans les plans tangents à S_1 et S_2 aux points respectifs M_1, M_2 sont telles que leurs directions conjuguées $M_1 t'_1$, $M_2 t'_2$ sont parallèles. Ceci résulte immédiatement de ce que les plans tangents à S_1 et S_2 aux points M_1, M_2 d'une part, M'_1, M'_2 d'autre part, sont parallèles et qu'il en est, par suite, de même des intersections des plans tangents en M_1, M'_1 d'une part, M_2, M'_2 d'autre part.

En particulier, on voit que, si les directions conjuguées $M_1 t_1$ et $M_1 t'_1$ sont rectangulaires, les directions correspondantes $M_1 t_1$ et $M_2 t_2$ seront parallèles. Autrement dit, sur les surfaces S_1 et S_2, les lignes de courbure se correspondent et ont aux points correspondants leurs tangentes et, par suite, leurs plans osculateurs parallèles.

L'égalité (14) montre alors que si, pour les surfaces S, S_1, ..., S_n, on appelle respectivement ds, ds_1, ..., ds_n les éléments d'arcs en M, M_1, ..., M_n des lignes de courbure qui sont, en ces points, parallèles à une même direction :

$$a\,ds = a_1\,ds_1 + a_2\,ds_2 + \ldots + a_n\,ds_n. \tag{15}$$

D'autre part, la remarque précédente établit que, pour ces lignes de courbure, les angles des plans osculateurs aux points M, M_1, ..., M_n respectivement avec les normales à S, S_1, ..., S_n ont la même valeur ϖ et que les angles de contingence des mêmes courbes aux mêmes points ont également la même valeur $d\varepsilon$.

Donc, en divisant les deux membres de l'égalité (15) par $\cos\varpi\, d\varepsilon$, on pourra écrire

$$a\,R = a_1 R_1 + a_2 R_2 + \ldots + a_n R_n, \tag{16}$$

R, R_1, ..., R_n étant les rayons de courbure principaux

des surfaces S, S_1, ..., S_n correspondant à une même direction principale aux points respectifs M, M_1, ..., M_n.

Or, il résulte d'une remarque précédente qu'à des directions correspondantes Mt, M_1t_1, ..., M_nt_n dans les plans tangents en M, M_1, ..., M_n aux surfaces respectives S, S_1, ..., S_n correspondent une même direction conjuguée. L'angle φ' de cette direction conjuguée avec une des directions principales communes aux surfaces S, S_1, ..., S_n aux points respectifs M, M_1, ..., M_n est donc constant.

On déduira alors des formules (6), (7) et (16) les relations :

$$a\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_n\mu_n, \tag{17}$$

$$aK = a_1K_1 + a_2K_2 + \ldots + a_nK_n, \tag{18}$$

μ, μ_1, ..., μ_n; K, K_1, ..., K_n désignant respectivement les rayons de courbure métacentrique et les paramètres de distribution relatifs aux points et directions correspondantes des surfaces S, S_1, ..., S_n. La formule (17) a été donnée dans le Mémoire cité plus haut; la formule (18) constitue, croyons-nous, un résultat nouveau.

[A3k]

ÉQUATION AUX RAPPORTS ANHARMONIQUES DES RACINES D'UNE ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. G. FONTENÉ.

---

1. La forme donnée précédemment à cette équation (*Nouvelles Annales*, 1912, p. 539) n'est pas la plus simple.

Si l'on considère l'un des six rapports anharmoniques de quatre quantités, son inverse et son complément à 1 sont également parmi les valeurs des rapports anharmoniques de ces quantités; les six rapports sont, l'un d'eux étant a,

$$(1) \qquad a, \quad 1-a, \quad \frac{1}{1-a}, \quad \frac{-a}{1-a}, \quad \frac{-(1-a)}{a}, \quad \frac{1}{a}.$$

1° Si deux des quatre quantités sont égales, les valeurs du rapport anharmonique sont

$$0, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad \infty, \quad -\infty;$$

les valeurs finies sont racines de l'équation

$$r^2(r-1)^2 = 0.$$

2° Si deux des trois termes de rang impair dans la suite (1) sont égaux, les trois le sont, les trois rapports de rang pair sont aussi égaux, et l'on a l'équation

$$(r^2 - r + 1)^3 = 0.$$

Comme l'équation aux valeurs des six rapports anharmoniques de quatre quantités doit dépendre d'un seul paramètre, cette équation est de la forme

$$(2) \qquad \frac{r^2(r-1)^2}{(r^2-r+1)^3} = A;$$

en effet, cette équation ne change pas si l'on remplace r par $\frac{1}{r}$ ou par $1-r$.

En tenant compte de ce que, pour $r = -1$, on a $A = \frac{4}{27}$, on trouve que l'équation aux rapports anharmoniques des racines d'une équation du quatrième degré est, avec les notations ordinaires,

$$(3) \qquad \frac{r^2(r-1)^2}{(r^2-r+1)^3} = \frac{4}{27}\,\frac{S^3 - 27T^2}{S^3}.$$

2. Si l'on pose

$$r^2 - r = \theta,$$

l'équation (2) prend la forme très simple

$$(2') \qquad \frac{\theta^2}{(\theta + 1)^3} = A,$$

et, pour chaque valeur de θ, on a deux valeurs de r complémentaires par rapport à 1; si l'on pose

$$r + \frac{1}{r} = \rho,$$

l'équation (2) devient

$$(2'') \qquad \frac{\rho - 2}{(\rho - 1)^3} = A,$$

et, pour chaque valeur de ρ, on a deux volumes inverses de r.

On obtient facilement l'équation (2) sous la forme (2') sans avoir recours à des cas particuliers. Les valeurs de r étant les nombres de la suite (1), l'équation en r est, *en groupant les racines de somme* 1,

$$(r^2 - r + \alpha)(r^2 - r + \beta)(r^2 - r + \gamma) = 0,$$

ou

$$(\theta + \alpha)(\theta + \beta)(\theta + \gamma) = 0,$$

ou

$$\theta^3 + (\alpha + \beta + \gamma)\theta^2 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\theta + 1 = 0,$$

ou

$$\theta^3 + (\alpha + \beta + \gamma)\theta^2 + 3\theta + 1 = 0,$$

ou

$$(\theta + 1)^3 - B\theta^2 = 0.$$

Pour obtenir la forme (2''), *on grouperait les racines de produit* 1, ce qui donnerait

$$(r^2 - \lambda r + 1)(r^2 - \mu r + 1)(r^2 - \nu r + 1) = 0,$$

ou

$$(\rho - \lambda)(\rho - \mu)(\rho - \nu) = 0,$$

etc.

3. *Remarque.* — Les valeurs des six rapports anharmoniques de quatre quantités peuvent toujours se mettre sous la forme

$$\sin^2\alpha, \quad \cos^2\alpha, \quad \text{séc}^2\alpha, \quad -\text{tang}^2\alpha, \quad -\cot^2\alpha, \quad \text{coséc}^2\alpha.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1913.

Composition de Géométrie analytique et mécanique.

Dans le plan xOy *du trièdre des coordonnées* $Oxyz$, *on donne le cercle de rayon* r, *tangent à* Oy *au point* O, *du côté de* Ox; *sur la circonférence, les points* A *et* B *situés à la distance* r *du point* O.

I. *Un point quelconque* P *de la circonférence est la projection d'un point* M *dont la cote est*

$$z = \text{PA} + \text{PB}.$$

1° *Calculer les coordonnées* x, y, z *du point* M *en fonction de l'angle polaire* $\text{PO}x = \omega$ *du point* P.

2° *Le lieu du point* M *est une courbe* Γ. *En construire les projections sur les plans* xOz, yOz.

II. *Soit* C *le point d'abscisse* $-r$ *pris sur le prolongement de* Ox; A, B, C *sont les points d'appui sur le plan horizontal, supposé rigide, de trois pieds sphériques identiques fixés aux trois sommets d'une lame triangulaire homogène.*

Sous l'action d'efforts horizontaux, la lame se met à tourner autour d'un certain axe vertical dont la trace I *sur le plan* xOy *a pour coordonnées polaires* f *et* ω.

1° *Exprimer que la résultante des réactions de frottement du plan sur la lame est perpendiculaire à* OI. (*On désignera par* a, b, c *les longueurs* IA, IB, IC; *par* α, β, γ *les coefficients de frottement, supposés différents, aux trois points* A, B, C.)

2° *On suppose* $\alpha = \beta$, γ *étant rendu négligeable au moyen d'un lubrifiant. Former l'équation polaire du lieu des points* I *définis par la condition précédente. Étudier ce lieu.*

3° *Comment varie, avec la position du point* I, *le moment résultant des réactions de frottement par rapport à la verticale du point* I?

Composition d'Algèbre et Trigonométrie.

On considère la fonction θ *de* x *définie par la relation* $\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1 + \theta x^2}$ *où le premier membre représente un arc compris entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $+\frac{\pi}{2}$.

1° *Déterminer lès valeurs limites de* θ *pour*

$$x = \pm\infty \quad \text{et} \quad x = 0.$$

2° *Suivre les variations de la fonction* $\theta(x)$ *quand* x *croît de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

3° *Dans cette fonction* $\theta(x)$, *on remplace* x *par* n^p, n *étant un entier variable et* p *un nombre positif donné; on considère la série dont le terme de rang* n *a pour valeur* $\theta(n^p)$. *Pour quelles valeurs de* p *la série est-elle convergente?*

4° *Calculer* $\int_a^\infty \frac{x}{1+x^2}\theta(x)\,dx$. *Étudier la variation de cette intégrale quand* a *augmente de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

5° *Calculer, à l'approximation de la règle à calcul, la valeur numérique de*

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\theta(x)\,dx.$$

Composition de calcul.

1° *Calculer une table des valeurs de* 10^{-t^2} *pour des valeurs de* t *croissant de* 0 *à* 1 *par échelons de* 0,1.

2° *De cette première table en déduire une deuxième qui donne les valeurs approchées de l'intégrale*

$$u = \int_0^t 10^{-t^2}\,dt,$$

pour des valeurs de t *croissant de* 0 *à* 1 *par échelons de* 0,1.

3° *Comment et dans quelles limites la deuxième table peut-elle servir à étudier la fonction de la variable* x *définie par la formule*

$$y = \int_0^x e^{-x^2}\,dx^2 \qquad (e = 2{,}718\ldots)?$$

4° *En particulier, calculer la valeur de* x *qui correspond à*

$$y = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \qquad (\pi = 3{,}14\ldots).$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET AUX BOURSES DE LICENCE EN 1913.

Composition de Mathématiques.

(Sciences. — I.)

PREMIÈRE COMPOSITION.

Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, *on considère la surface* (S) *définie par l'équation*

$$z = xy + x^3,$$

et la droite (D) *définie par les équations*

$$y = b, \qquad z = c$$

où b et c sont deux constantes données, la seconde n'étant pas nulle. Dans tout ce qui suit cette droite (D) *restera fixe.*

1° *Montrer que la surface* (S) *est réglée et trouver ses génératrices.*

2° *A chaque génératrice rectiligne* (G) *de la surface* (S) *on fait correspondre le plan* (P) *mené par la droite* (D) *et parallèle à la symétrique de* (G) *par rapport au plan* xOy. *Déterminer le lieu du point d'intersection de* (G) *et de* (P), *quand la droite* (G) *décrit la surface* (S

Montrer que ce lieu est une courbe (C) *située sur une quadrique* (Q) *et déterminer cette quadrique.*

3° *Former l'équation du quatrième degré donnant les abscisses des points d'intersection de la courbe* (C) *avec un plan donné par son équation*

$$ux + vy + wz + s = 0.$$

Calculer les fonctions symétriques élémentaires des racines en fonction de u, v, w, s. *En déduire la relation à laquelle doivent satisfaire les abscisses* x_1, x_2, x_3, x_4, *de quatre points de la courbe* (C) *pour que ces quatre points soient dans un même plan.*

Cette relation sera utile dans la plupart des questions qui vont suivre.

4° *Déduire de la relation précédente les relations auxquelles doivent satisfaire les abscisses* x_1, x_2, x_3 *de trois points de la courbe* (C) *pour que ces trois points soient en ligne droite.*

Former l'équation générale du troisième degré dont les racines sont les abscisses de trois points en ligne droite de la courbe (C). *Montrer que les droites qui coupent la courbe* (C) *en trois points engendrent l'une des familles de génératrices rectilignes de la quadrique* (Q).

5° *Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les plans osculateurs à la courbe* (C) *en trois points donnés se coupent sur la courbe* (C) *est que ces trois points soient en ligne droite.*

6° *Par un point quelconque* M *de la courbe* (C) *il passe deux plans jouissant de la propriété d'être tangents à la courbe* (C) *au point* M *et en un autre point (c'est-à-dire d'être bitangents à la courbe). Soient* M' *et* M'' *les seconds points de contact de ces*

deux plans. Montrer qu'il existe un plan bitangent à la courbe (C) *en* M′ *et* M″.

A quelles relations doivent satisfaire les abscisses de trois points M, M′, M″ *de la courbe* (C) *pour que deux quelconques d'entre eux soient les points de contact d'un plan bitangent à la courbe* (C)?

7° *Former l'équation générale du troisième degré dont les racines sont les abscisses de trois points* M, M′, M″, *de la courbe* (C) *satisfaisant aux conditions précédentes. Exprimer les coefficients de cette équation au moyen de l'abscisse* ξ *du quatrième point d'intersection* μ *de la courbe* (C) *avec le plan* (Π) *déterminé par les points* M, M′, M″.

Calculer, en fonction de ξ, *les coefficients de l'équation du plan* (Π) *et les coordonnées du point de concours* A *des tangentes à la courbe* (C) *aux points* M, M′, M″. *Ce point* A *sera dit le point* associé *au point* μ *de la courbe* (C).

8° *Montrer qu'il existe une infinité de quadriques, ne dépendant que de* b *et de* c, *par rapport auxquelles le point* A *est le pôle du plan* (Π); *déterminer ces quadriques et montrer que l'une d'elles est la quadrique* (Q) *déjà considérée.*

Déterminer le lieu (Γ) *du point* A, *ainsi que l'enveloppe du plan* (Π), *quand le point* μ *décrit la courbe* (C).

9° *A trois points quelconques en ligne droite* μ_1, μ_2, μ_3, *pris sur la courbe* (C), *sont associés les trois sommets* A_1, A_2, A_3, *d'un triangle inscrit dans la courbe* (Γ). *Déterminer, en supposant* $b = 0$, *l'enveloppe des côtés de ce triangle quand la droite* $\mu_1\mu_2\mu_3$ *varie. Montrer que, dans la même hypothèse* $b = 0$, *le cercle circonscrit de ce triangle* $A_1A_2A_3$ *passe par deux points fixes.*

DEUXIÈME COMPOSITION.

On donne deux axes rectangulaires et l'on considère l'équation différentielle

$$y - 2xy' + y^2y'^3 = 0.$$

1° *Montrer que cette équation admet une infinité de courbes intégrales* C, *dont l'équation est de la forme* $y^2 = f(x)$, $f(x)$ *désignant un polynome en* x. *Écrire l'équation générale des courbes* C; *montrer que, par tout point du plan, il passe, soit une, soit trois courbes* C, *et déterminer la région du plan où doit se trouver le point pour que le nombre des courbes qui y passent soit égal à trois; déterminer le lieu des points tels que deux des courbes* C *qui passent par l'un d'eux soient orthogonales.*

2° *On donne le point* A ($x = 0,5$; $y = 0$). *Soit* P *celle des courbes* C *qui passe par* A *et tourne sa concavité vers la partie positive de l'axe* Ox; *soit* B *le point de la courbe* P *qui a pour ordonnée* $\sqrt{6}$. *Soit* Q *celle des courbes* C *passant par* B *et qui tourne sa concavité vers les* x *négatifs; soit enfin* A' *le point où cette courbe coupe l'axe* Ox. *Calculer l'aire limitée par les arcs de courbes* AB, BA', *et l'axe* Ox.

3° *Un point mobile, partant de* A, *parcourt successivement l'arc* AB *de* P, *puis l'arc* BA' *de* Q. *Son accélération tangentielle est constamment égale à sa vitesse, et sa vitesse initiale est égale à* 1; *au point* B *on supposera que la vitesse ne subit pas de changement de grandeur, mais seulement un changement de direction. Calculer à* 0,1 *près le temps mis par le mobile pour parcourir l'arc* ABA'.

4° *Au point* B, *l'accélération du mobile subit une*

discontinuité. Calculer par ses projections sur les deux axes de coordonnées la variation géométrique du vecteur-accélération au point B.

Composition de Mathématiques.

(Sciences. — II.)

I. *On considère dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy. *Un point matériel* M, *de masse égale à* 1, *est mobile dans ce plan sous l'action d'une force* (F) *dont les projections* X *et* Y *sur les axes sont :*

$$X = x, \qquad Y = y - 4x,$$

x *et* y *désignant les coordonnées du point* M.

1° *Former et intégrer les équations différentielles du mouvement du point* M.

2° *Déterminer le mouvement du point* M *en supposant qu'à l'origine du temps ses coordonnées sont* $(\alpha, 0)$ *et que sa vitesse a pour projections sur les axes* $(-\alpha, 2\alpha)$. *Construire la trajectoire* (T) *correspondant de ce mouvement.*

3° *Évaluer le temps mis par le mobile pour aller d'un point quelconque* M *de sa trajectoire* (T) *au point* M′ *où la tangente à la trajectoire est parallèle au rayon vecteur* OM.

4° *Démontrer que l'hodographe du mouvement est une courbe homothétique de la trajectoire* (T) *et calculer à* 0,01 *près le rapport d'homothétie.*

5° *La trajectoire* (T) *passe par le point* O. *Évaluer, en fonction de l'abscisse du point* M, *l'aire limitée par l'arc de courbe* OM *et la corde* OM, *ainsi que le volume engendré par cette aire tournant autour de* Oy.

II. *Évaluer à* 0,01 *près les intégrales*

$$\int_0^\pi \frac{dx}{2\cos x+3}, \qquad \int_0^\pi \frac{dx}{(2\cos x+3)^2}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie des nombres; Tome I: Le premier degré, par *E. Cahen*. 1 vol. gr. in-8°, de XII + 408 pages. Paris, A. Hermann et fils. Prix : 14fr.

Il y a quelques années, M. E. Cahen nous donnait des *Éléments de la théorie des nombres* qui venaient combler une lacune singulière de notre littérature scientifique et qui ont obtenu le plus vif succès. Le même auteur paraît maintenant avoir en vue un Traité complet et de vastes dimensions si l'on en juge par l'étendue du premier Volume, consacré seulement aux notions élémentaires, aux formes et aux équations du premier degré. Ce Volume mériterait mieux que l'analyse sommaire à laquelle nous devons nous restreindre ici.

Comme le fait observer M. Cahen, une première difficulté, quand on écrit une Théorie des nombres, est de délimiter le sujet. On ne peut plus dire que la théorie des nombres a trait aux propriétés des nombres entiers, depuis que l'on sait que l'ensemble des Mathématiques peut être édifié sur la seule notion de nombre entier. L'auteur propose une définition profonde et ingénieuse. La Théorie des nombres est, d'après lui, « la science des calculs dans lesquels la division n'est possible que dans des cas particuliers, par opposition à l'Algèbre, qui est au contraire la science des calculs dans lesquels la division n'est impossible que dans des cas particuliers ».

Dans les premiers Chapitres, M. Cahen n'a pas hésité à reprendre l'exposition des théories les plus élémentaires, en commençant à la définition du nombre entier (pour laquelle l'auteur suit Helmholtz). C'est dire que ces Chapitres attireront surtout le lecteur curieux des principes. Le mathématicien

désireux d'acquérir des connaissances d'une autre sorte commencera plus loin la lecture du Livre. C'est en effet seulement à la page 90 que l'on aborde la théorie des nombres, au sens ordinaire de cette expression, par un Chapitre consacré aux équations diophantiennes linéaires à une et deux inconnues. Les équations à plusieurs inconnues et les systèmes d'équations linéaires font l'objet du Chapitre suivant.

Après un rappel de théories algébriques classiques (Analyse combinatoire, déterminants), on revient aux systèmes d'équations linéaires. Le couronnement de l'étude est la démonstration d'un beau théorème dû à Heger, et qui fait connaître les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tel système admette des solutions entières. Signalons aussi des représentations géométriques élégantes.

Les sujets développés dans les Chapitres suivants seront certainement nouveaux pour beaucoup de lecteurs français. Ce sont : les substitutions linéaires homogènes; les formes linéaires et les formes bilinéaires, pour lesquelles on établit l'existence des formes réduites et les conditions d'équivalence; les systèmes de congruences linéaires et enfin le calcul des tableaux, d'une portée si grande que plusieurs auteurs anglais lui donnent le nom d'*universal algebra*. La rédaction de ces Chapitres a dû demander à M. Cahen non seulement le dépouillement de nombreux Mémoires, de lecture souvent pénible, mais encore et surtout un travail personnel considérable de mise au point, sur lequel une modestie excessive l'a empêché d'attirer l'attention. Mais on peut le faire pour lui.

Il est impossible de tout signaler ici, mais je citerai au moins la démonstration élégante par laquelle M. Cahen établit qu'*un système de n formes linéaires à n variables n'a pas d'autre invariant que les puissances de son déterminant.*

On revient à des sujets plus familiers, tels que la décomposition des nombres entiers en facteurs premiers et la théorie de l'indicateur. C'est par les éléments de la théorie des congruences à module premier que se termine le Volume.

Je ne sais si, par ce résumé trop succinct, j'ai pu donner quelque idée de l'importance de ce premier Tome. Le Traité, une fois complet, dotera enfin notre littérature d'un Ouvrage imposant, au moins équivalent pour la richesse aux Livres analogues que possèdent déjà les étrangers. Nous attendons

avec une impatience particulière la partie qui sera consacrée aux nombres algébriques et aux idéaux. Il est vraiment déplorable que nous n'ayons pas encore un Ouvrage d'ensemble original sur ce Chapitre de l'Arithmétique générale, que l'on s'accorde à considérer comme le plus beau de tous (¹).

R. B.

Lecciones de Algebra elemental; por *Félix Pernot*, ex alumno de la Escuela Politecnica de Paris, director de los estudios de Matematicas en la Escuela Militar y Naval de Montevideo. 1 vol. in-8° de 215 pages. Montevideo, 1911.

Ce Livre d'enseignement, écrit en langue espagnole, diffère assez profondément des nôtres, bien que l'auteur soit français et familier avec les méthodes françaises. M. Pernot paraît s'être donné pour but de mettre rapidement les élèves au courant des faits essentiels de l'Algèbre, et cela grâce à une largeur d'exposition que les puristes de la rigueur trouveraient peut-être excessive. Ils auraient tort, selon nous. La notion de nombre négatif, par exemple, est assez près d'être intuitive... chez les élèves qui ont l'instinct mathématique, et ils n'ont pas besoin qu'on leur légitime la règle des signes par des raisonnements minutieux. Des exemples suggestifs suffisent. Plus tard, ils désireront peut-être asseoir leurs connaissances un peu empiriques sur des bases plus solides, mais le plus pressé était en somme d'apprendre à manier le calcul algébrique. J'estime donc que M. Pernot a bien fait de profiter d'une liberté que ne lui auraient pas laissée nos programmes d'enseignement.

Ses *Leçons d'Algèbre élémentaire* vont un peu plus loin que ne le laisserait supposer le titre. On y trouve en particulier les formules fondamentales de l'analyse combinatoire, la formule de Newton, l'introduction des quantités complexes. Dans tout l'Ouvrage, l'auteur a fréquemment recours aux

---

(¹) Il serait pourtant injuste de ne pas mentionner ici les *Leçons sur la Théorie des nombres* de M. A. Châtelet (1913), qui renferment une exposition très intéressante des fondements de la théorie des nombres algébriques.

représentations graphiques, et il reste fidèle le plus possible à l'excellent principe de « hacer presenciar al principiante la invencion de la ciencia » (faire pressentir au débutant l'invention de la science).

TRIGONOMETRIA PLANA; por *Félix Pernot*. 1 vol. in-8° de 93 + III pages. Montevideo, 1911.

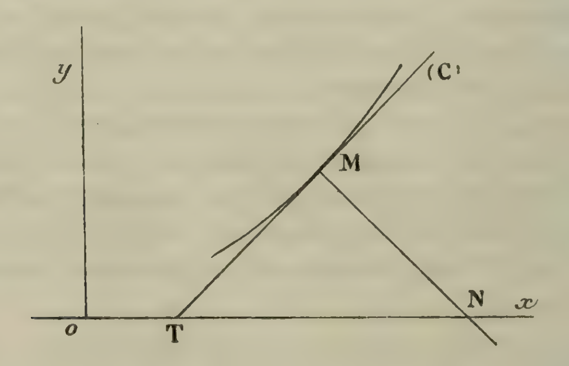
Les qualités de l'Ouvrage précédent se retrouvent dans celui-ci, qui renferme, outre ce qu'on peut s'attendre à rencontrer dans une trigonométrie élémentaire, la démonstration de la formule d'Euler (les imaginaires sont introduites par une méthode géométrique fort intéressante), la résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré, des notions de calcul vectoriel.

R. B.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première question. — *On donne deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy. *Soient* T



et N *les points de rencontre de l'axe* Ox *avec la tangente de la normale en un point* M *à une courbe* (C) *située dans le plan des deux axes.*

On demande de déterminer la courbe C *de façon que le rayon de courbure en chaque point* M *de cette courbe soit égal à la longueur* TN.

Démontrer qu'il existe deux courbes de cette espèce passant par un point donné du plan zOy, *et tangentes en ce point à une droite donnée. Indiquer la forme de ces deux courbes.*

Deuxième question. — *Soient* $y = y_1(x)$, $z = z_1(x)$ *un système particulier d'intégrales des équations* (E)

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{dy}{dx} = \mathrm{A}y + \mathrm{B}z, \qquad \frac{dz}{dx} = \mathrm{C}y + \mathrm{D}z,$$

où A, B, C, D *sont des fonctions de la variable* x. *Démontrer que les équations* (E) *admettent un autre système d'intégrales, distinct des premiers, représentées par des formules*

$$y_2 = \frac{f(x)}{z_1} + y_1 \int_{x_0}^{x} \left[\frac{\varphi(x)}{y_1^2} + \frac{\psi(x)}{z_1^2}\right] dx,$$

$$z_2 = -\frac{f(x)}{y_1} + z_1 \int_{x_0}^{x} \left[\frac{\varphi(x)}{y_1^2} + \frac{\psi(x)}{z_1^2}\right] dx,$$

les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *ne dépendant que des coefficients* A, B, C, D.

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\mathrm{I}_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^m - 1} dx,$$

m *étant un nombre entier positif supérieur à* 3.

Cas particulier où $m = 4, 5, 6$.

(Octobre 1911.)

Poitiers.

Épreuve théorique. — I. *Étude des intégrales d'une équation différentielle linéaire au voisinage d'un point singulier.*

II. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2 - 1}\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{2x}{x^2 - 1}\frac{\partial t}{\partial x} = 0.$$

1° *Montrer que cette équation admet une infinité de solutions de la forme*

$$t = uvw,$$

u étant une fonction de la seule variable x, v une fonction (transcendante) de la seule variable y, w une fonction (transcendante) de la seule variable z, et v et w satisfaisant respectivement aux équations linéaires

$$\frac{d^2 v}{dy^2} + m^2 v = 0, \qquad \frac{d^2 w}{dz^2} - k^2 w = 0 \qquad (m \text{ et } k \text{ constantes}).$$

2° *Montrer que u est alors solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Cette équation a deux points singuliers à distance finie. Étudier la forme des intégrales u au voisinage de ces points.*

III. 1° *Développer la fonction $y = \frac{1}{x}$ en série trigonométrique dans l'intervalle $-\pi, +\pi$.*

2° *Trouver la somme de la série*

$$\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \ldots \qquad \text{pour} \qquad -\pi < x < \pi,$$

et démontrer que cette série converge seulement pour les valeurs réelles de x.

Épreuve pratique. — I. *Intégrer l'équation aux différentielles totales*

$$(zy + z)\,dx + (z - 2x)\,dy - (x + y)\,dz = 0.$$

II. *Calculer, en appliquant la méthode des résidus, l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b\cos\theta)^2}.$$

(Juillet 1912.)

Épreuve théorique. — I. *Appelant* F(x) *une fonction*

de x holomorphe dans un cercle S de centre a et désignant par t une quantité telle que l'inégalité

$$|t\,F(x)| < |x-a|$$

soit satisfaite en tous les points du contour de S, *démontrer que l'équation en x*

$$x = a + t\,F(x)$$

a une racine et une seule à l'intérieur de S.

II. *Désignant par y la racine de l'équation en x*

$$x = 1 + t\,x^2$$

qui se réduit à l'unité pour $t=0$, montrer que cette racine est une fonction continue de t au voisinage de $t=0$, et que l'on a

$$y^n = 1 + nt + \frac{n(n+3)}{2!}t^2 + \frac{n(n+4)(n+5)}{3!}t^3 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4!}t^4 + \ldots$$

tant que $|t| < \frac{1}{4}$.

III. *Appelant $F(x)$ un produit de facteurs primaires de genre* 3, *et désignant par* $1, \omega, \omega^2$ *les racines cubiques de l'unité, montrer que*

$$F(x)\,F(\omega x)\,F(\omega^2 x)$$

est une fonction entière de genre zéro *de la variable x^3 Donner un exemple.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{\sin a x}{e^{2\pi x}-1}\,dx.$$

(Novembre 1912.)

Épreuve théorique. — I. *Définition des produits de facteurs primaires de genre p. Étudier la convergence de ces produits.*

II. *On considère une fonction réelle* F(z) *nulle pour* $z = 0$ *et holomorphe pour* $|z| \leqq 1$. *Séparant dans* z *et* F *les parties réelles des parties imaginaires, on pose*

$$F(z) = P + iQ.$$

Donnant à x *une valeur réelle, fixe, moindre que* 1, *on séparera les parties réelles des parties imaginaires dans les intégrales*

$$\int \frac{F(z)}{z - x} dz \qquad \text{et} \qquad \int \frac{F(z)}{1 - zx} dz$$

le long du cercle C *de rayon* 1 *qui a son centre à l'origine; et l'on démontrera que*

$$\int_0^{2\pi} \frac{x \sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} Q(\cos\theta \sin\theta)\, d\theta = \pi F(x).$$

III. *Démontrer que l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$y'' + 3yy' + y^3 = p(x),$$

où $p(x)$ *est un polynome en* x, *est la dérivée logarithmique d'une fonction entière de* x.

Épreuve pratique. — 1° *Trouver une famille de surfaces du second ordre constituant une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles*

(1) $$x^2 + z^2 = 2xzp + yzq.$$

2° *Trouver une famille de surfaces du second ordre constituant une intégrale complète de l'équation*

(2) $$x^2 + z^2 = 2xzp + yzq + \frac{z^2q^2}{y^2}.$$

3° *Trouver une intégrale de l'équation* (1) *qui passe par la courbe*

$$z = 0, \qquad 4x^3 + y^4 = 0.$$

(Juin 1913.)

Rennes.

Épreuve théorique. — I. Partie analytique. — *Le mouvement d'un point* M, *rapporté à trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz *et ayant pour coordonnées semi-polaires* r, θ, z, *est défini par les équations différentielles*

$$\frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(z^2 + a^2)^2}{a z^2} \qquad (a \text{ constant})$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{r}{z} \frac{(a^2 - z^2)}{(a^2 + z^2)}$$

et par les coordonnées r_0, θ_0, z_0 *de la position* M_0 *que le point mobile occupe à l'instant* t_0.

1° *Trouver la relation, en termes finis, entre* r *et* z, *puis la relation en termes finis entre* t *et* z *et simplifier cette dernière en posant*

$$z = a \operatorname{tang} \varphi.$$

2° *Si, dans les relations précédemment obtenues, on regarde* t *et* t_0 *comme des constantes, on définit une correspondance entre les points* M_0 *et* M. *Montrer que, à une courbe fermée* (C_0) *située dans un plan parallèle à* xOy, *correspond une courbe fermée* (C) *située aussi dans un plan parallèle à* xOy *et que les projections des courbes* (C_0) *et* (C) *sur* xOy *sont homothétiques par rapport au point* O; *trouver la relation entre les aires* A_0 *et* A *limitées par ces courbes.*

3° *Soient* (S) *la surface engendrée par la courbe* (C), *qui vient d'être définie, quand* t *varie de* t_1 *à* t_2; (V) *le volume limité par la surface* (S) *et par les plans qui contiennent* (C) *aux instants* t_1 *et* t_2. *Calculer* V *en fonction de* a, z_0, A_0, t_1, t_2.

4° *Calculer* $\frac{dr}{dt}$ *en fonction de* r *et de* z, *puis les projections* u, v, w *de la vitesse du point* M *sur les axes* Ox, Oy, Oz.

Montrer que l'intégrale

$$\int_{(\Gamma)} u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

prise le long d'une courbe fermée (Γ) *située dans un plan parallèle à* $x\mathrm{O}y$, *est nulle et que le flux du vecteur* (u, v, w) *à travers une surface fermée quelconque* (Σ) *est nul aussi.*

[*On appelle flux du vecteur* (u, v, w) *à travers une surface fermée* (Σ) *l'intégrale*

$$\int\int_{(\Sigma)} (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, d\sigma,$$

étendue à la surface Σ *où* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *désignent les cosinus directeurs de la normale extérieure à* (Σ) *en un point de l'élément* $d\sigma$.]

II. Partie géométrique. — *On considère la surface réglée* (Σ) *engendrée par les normales principales d'une courbe gauche* (Γ).

1° *Exprimer, au moyen de l'arc* s *de* (Γ) *et de la longueur* l *portée sur la normale principale à partir du point* M *de la courbe* (Γ), *les coordonnées d'un point quelconque* P *de* (Σ), *le* $d\mathrm{S}^2$ *de cette surface.*

Former l'équation du plan tangent au même point, et vérifier que la normale à la surface (Σ) *au point* P *peut s'obtenir en composant un vecteur égal à* $1 - \frac{l}{\mathrm{R}}$ *parallèle à la binormale de* (Γ) *et un vecteur* $\frac{l}{\mathrm{T}}$ *parallèle à la tangente de* (Γ) *au point* M, R *et* T *désignant suivant l'usage les rayons de courbure et de torsion de* (Γ).

2° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de* (Σ); *montrer que si l'on pose*

$$\mathrm{R}\rho = 1, \qquad \mathrm{T}\tau = 1, \qquad l\lambda = 1,$$

l'intégration de l'équation différentielle obtenue pour λ *considéré comme fonction de* s *se ramène à la quadrature*

$$\int \frac{\tau \dfrac{d\rho}{ds} - \rho \dfrac{d\tau}{ds}}{2\tau^{\frac{3}{2}}}.$$

La courbe (Γ) *est ligne asymptotique de la surface* (Σ).

Épreuve pratique. — *Si l'on désigne par* δu *le premier*

membre de l'équation aux dérivées partielles

$$\delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0 :$$

1° *Vérifier que l'on a*

$$\delta(\lambda U) = \lambda \delta U + U \delta\lambda + 2\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + 2\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y},$$

λ *et* U *désignant des fonctions de* x, y, z.

2° *Soit*

$$U = F(X, Y, Z),$$

X, Y, Z *désignant des fonctions de* x, y, z; *écrire le développement de* $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial U}{\partial z}$ *ordonné suivant les dérivées de la fonction* $F(x, y, z)$ *par rapport aux variables* X, Y, Z.

3° *Soient*

$$u = \lambda F(X, Y, Z)$$

et

$$X = \frac{x}{z}, \qquad Y = \frac{y}{z}, \qquad Z = \frac{-1}{z}, \qquad \lambda = \frac{1}{z} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{4z}\right)};$$

vérifier que l'on a

$$\frac{1}{\lambda}\delta u = \frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{\partial F}{\partial Z}\right).$$

Déduire de là que, si l'on connaît une solution de l'équation $\delta u = 0$, *on peut immédiatement obtenir une seconde solution de la même équation.*

4° *Soit*

$$u = f(r, z) \qquad \text{où} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

pour que u *soit une solution de l'équation* $\delta u = 0$, *on doit avoir*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Chercher une solution de l'équation $\delta u = 0$ *qui soit de la forme*

$$u = e^{A r^2 + B},$$

A *et* B *étant des fonctions de* z. (Juin 1911.)

QUESTIONS.

2210. Prouver les inégalités suivantes (sans faire usage des dérivées)

1°
$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m+1} > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{2m+3};$$

2°
$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\left(1+\frac{1}{2m}\right) > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}\left(1+\frac{1}{2m+2}\right);$$

3°
$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\left(1+\frac{1}{2m+1}\right) < \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}\left(1+\frac{1}{2m+3}\right);$$

4°
$$\frac{2m+1}{2m(m+1)} > \log\left(1+\frac{1}{m}\right) > \frac{2}{2m+1};$$

où m est un nombre positif.

T. Ono.

2211. Soient M et M′ les extrémités de deux demi-diamètres conjugués, F et F′ les foyers d'une ellipse E. Les droites M′F′, MF se coupent en P, et les droites M′F, MF′ se rencontrent en Q. Montrer que, quels que soient les demi-diamètres OM et OM′, le quadrilatère PMQM′ est circonscriptible à un cercle de rayon constant (égal au demi-petit axe).

E.-N. Barisien.

ERRATA.

(4e série, t. XIII, p. 384.)

	au lieu de :	lire :
Ligne 3	pour	p est
» 4	$a^{p-1} - b^{p-1}$	$a^{p-1} - b^{p-1}$
» 15 (à la fin)	h^{p-1}	h^{p-2}
» 16	*Si l'on n'excepte*	*Si l'on excepte*

[A3aα]

SUR LE THÉORÈME DE D'ALEMBERT ET LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. PAUL MONTEL.

M. Goursat a donné une démonstration des théorèmes d'existence des fonctions implicites qui repose sur la méthode des approximations successives de M. Picard ([1]). Je voudrais montrer que cette méthode conduit aussi à une démonstration simple du théorème de d'Alembert et de quelques propositions fondamentales relatives aux fonctions algébriques.

1. J'établirai d'abord le théorème suivant :

Considérons l'équation

$$z = \varphi(z) = t + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \ldots + \alpha_m z^m \tag{1}$$

qui, pour $t = 0$, *admet la racine* $z = 0$; *cette équation admet aussi une racine lorsque* t *est voisin de zéro.*

Posons, en effet,

$$\begin{aligned} z_0 &= 0, \\ z_1 &= \varphi(0) = t, \\ z_2 &= \varphi(z_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_n &= \varphi(z_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Je dis que la suite $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$ a une limite,

([1]) *Sur la théorie des fonctions implicites* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXI, 1903, p. 184-192).

racine de l'équation (1), lorsque n croît indéfiniment, à condition que t soit suffisamment voisin de zéro. Il suffit, pour cela, de démontrer que la série, dont le terme général est $u_n = z_n - z_{n-1}$, est convergente. Or on a

$$u_{n+1} = z_{n+1} - z_n = \varphi(z_n) - \varphi(z_{n-1}) = \sum_{k=2}^{k=m} \alpha_k (z_n^k - z_{n-1}^k)$$

ou

$$u_{n+1} = u_n \sum_{k=2}^{k=m} \alpha_k (z_n^{k-1} + z_n^{k-2} z_{n-1} + \ldots + z_{n-1}^{k-1}).$$

Désignons par r un nombre supérieur aux valeurs absolues de z_n et z_{n-1}, par α'_k la valeur absolue de α_k, et par M un nombre supérieur à la somme

$$2\alpha'_2 + 3\alpha'_3 + \ldots + m\alpha'_m.$$

On aura, si $r < 1$,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \sum k \alpha'_k r^{k-1} < \mathrm{M} r.$$

Soit alors r un nombre fixe inférieur à l'unité et à $\frac{1}{2\mathrm{M}}$, donnons à t une valeur dont le module soit inférieur à $\frac{r}{2}$; je dis que z_n est, quel que soit n, inférieur à r en valeur absolue. On a, en effet,

$$|z_1| < \frac{r}{2},$$

$$|z_2| < |t| + \alpha'_2 |z_1|^2 + \ldots + \alpha'_m |z_1|^m < \frac{r}{2} + \mathrm{M} r^2 < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

$$|z_3| < |t| + \alpha'_2 |z_2|^2 + \ldots + \alpha'_m |z_2|^m < \frac{r}{2} + \mathrm{M} r^2 < r,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|z_n| < r,$$

$$\ldots\ldots$$

Donc, on a $|z_n| < r$, quel que soit n, et, par

suite, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \frac{1}{2}$. Il en résulte que la suite z_n est convergente : désignons par z sa limite, z est racine de l'équation (1), car si dans l'égalité

$$z_{n+1} = \varphi(z_n)$$

on fait croître n indéfiniment, il vient

$$z = \varphi(z).$$

La proposition est établie.

2. Une conséquence immédiate du théorème que nous venons d'établir est la suivante :

Si l'équation

$$(2) \qquad f(z, u) = u + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m = 0$$

admet pour $u = u_0$ *une racine simple* z_0, *cette équation admet aussi une racine lorsque* u *est voisin de* u_0.

Posons en effet

$$z = z_0 + h, \qquad u = u_0 - t f'_z(z_0, u_0),$$

l'équation s'écrit alors, puisque $f(u_0, z_0) = 0$,

$$-t f'_z(z_0, u_0) + h f'_z(z_0, u_0) + \frac{h^2}{1.2} f''_{z^2}(u_0, z_0) + \ldots = 0$$

ou, puisque $f'_z(z_0, u_0)$ est différent de zéro,

$$h = t + \alpha_2 h^2 + \ldots + \alpha_m h^m.$$

Cette dernière équation possède, d'après le théorème précédent, une racine h lorsque t est voisin de zéro; donc l'équation considérée admet une racine z lorsque u est voisin de u_0.

3. J'établirai maintenant la proposition suivante :

Si l'équation $f(z, u) = 0$ n'admet pas de racine z pour $u = u_0$, elle n'a pas non plus de racine pour des valeurs de u voisines de u_0.

S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver une suite de valeurs de u ayant pour limite u_0, pour chacune desquelles l'équation aurait une racine : soient

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

ces valeurs de u, et

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$$

les valeurs correspondantes de z. Désignons par N un nombre supérieur à tous les $|u_n|$ et aux nombres $|a_1|$, $|a_2|$, $|a_3|$, ..., $|a_{m-1}|$. On a [1]

$$|z_n| < 1 + \frac{N}{|a_m|}.$$

Les nombres z_n ayant leurs modules bornés, on peut extraire, de la suite qu'ils forment, une suite nouvelle

$$z_{p_1}, z_{p_2}, z_{p_3}, \ldots, z_{p_n}, \ldots$$

admettant une limite unique z_0 [2]. Je dis que z_0 est

[1] C'est ici que s'introduit l'hypothèse que le premier membre de l'équation est un polynome : le théorème précédent s'applique à une fonction transcendante entière; il n'en est plus de même pour celui qui nous occupe.

[2] On peut le montrer de la manière suivante : soit $z_n = x_n + iy_n$; les nombres x_n sont bornés : apppelons x_0 leur borne supérieure, par exemple; on peut extraire de la suite

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots,$$

une suite nouvelle

$$x_{q_1}, \quad x_{q_2}, \quad x_{q_3}, \quad \ldots, \quad x_{q_n}, \quad \ldots$$

ayant pour limite unique le nombre x_0. Les nombres

$$y_{q_1}, \quad y_{q_2}, \quad y_{q_3}, \quad \ldots, \quad y_{q_n}, \quad \ldots$$

sont aussi bornés : appelons y_0 leur borne supérieure, par exemple;

une racine de l'équation $f(z, u_0) = 0$. On a, en effet,

$$f(z_{p_n}, u_{p_n}) = 0.$$

Or, si l'on fait croître n indéfiniment, z_{p_n} a pour limite z_0 et u_{p_n} a pour limite u_0; par suite, comme $f(z, u)$ est continue en z et en u,

$$f(z_0, u_0) = 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse. On ne peut donc pas supposer que l'équation admette des racines lorsque u est voisin de u_0.

4. Nous pouvons maintenant établir le théorème de d'Alembert. Considérons l'équation

$$(2) \qquad f(z, u) = u + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m = 0$$

et soient $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_k$ toutes les racines de l'équation dérivée en z

$$a_1 + 2 a_2 z + \ldots + m a_m z^{m-1} = 0.$$

Pour que ζ_i soit racine de l'équation $f(z, u) = 0$, il faut que u prenne la valeur u_i donnée par l'équation

$$f(\zeta_i, u_i) = 0.$$

Marquons dans le plan de la variable u les points O, $P_1, P_2, \ldots, P_k$, correspondant respectivement aux valeurs $0, u_1, u_2, \ldots, u_k$ de u [1]. Pour ces valeurs

on peut extraire de la suite y_{q_n} une suite nouvelle

$$y_{p_1}, \quad y_{p_2}, \quad y_{p_3}, \quad \ldots, \quad y_{p_n}, \quad \ldots$$

ayant pour limite unique y_0. Alors, la suite

$$z_{p_1}, \quad z_{p_2}, \quad z_{p_3}, \quad \ldots, \quad z_{p_n}, \quad \ldots$$

a pour limite unique z_0.

[1] Un ou plusieurs points P_i peuvent coïncider avec le point O, mais cela ne modifie en rien le raisonnement qui va suivre, car l'équation a toujours une racine simple en O.

de u, l'équation a une racine. Prenons une valeur quelconque de u différente des précédentes et soit Q le point correspondant dans le plan des u; je dis que l'équation a une racine en Q. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi et traçons le segment OQ; ce segment peut contenir ou non un point P_i; admettons d'abord qu'il n'en contienne aucun. Soit Q_1 le milieu de OQ : si l'équation n'a pas de racine en Q_1, je remplace le segment OQ par le segment OQ_1; si l'équation a une racine en Q_1, je remplace ce segment OQ par le segment Q_1Q. Appelons Q_1R_1 le nouveau segment et soit Q_2 son milieu; je remplacerai de la même manière ce dernier segment par un segment Q_2R_2, situé aussi sur OQ, ayant une extrémité en Q_2 et une longueur deux fois plus petite que celle du précédent, et ainsi de suite. Je forme de cette façon une suite infinie de segments

$$Q_1R_1, \quad Q_2R_2, \quad \ldots, \quad Q_nR_n, \quad \ldots$$

emboîtés chacun dans tous les précédents et ayant pour limite un point U. Considérons l'un de ces segments : pour l'une de ses extrémités, l'équation a une racine et, pour l'autre extrémité, elle n'a pas de racine; donc, dans le voisinage du point U, il y a des points où l'équation n'a pas de racine et des points où elle a une racine. Or, ce résultat est en contradiction avec les théorèmes précédents, car, si l'équation a une racine en U, cette racine est simple puisque le segment OQ ne contient aucun point P_i, et l'équation a une racine pour tous les points voisins de U et, si elle n'a pas de racine en U, elle n'a pas de racine dans le voisinage de U.

Supposons maintenant que le segment OQ contienne l'un des points P_i et soit Q' un point du plan choisi de

manière que ni le segment OQ′, ni le segment QQ′ ne contiennent aucun point P_i. D'après le raisonnement précédent appliqué au segment OQ′, l'équation a une racine en Q′ et, en répétant sur le segment QQ′ le même raisonnement dans lequel le point Q′ jouerait maintenant le rôle du point O, on montrerait de la même manière que l'équation a une racine au point Q [1]. Le théorème est donc démontré.

3. Nous avons démontré dans les paragraphes 1 et 2 que, si une équation algébrique (2) admet une racine simple pour $u = u_0$, elle a aussi une racine dans le voisinage de u_0. En examinant de plus près le raisonnement qui nous a conduit à ce résultat, nous en tirerons des conséquences plus précises. Considérons d'abord l'équation (1)

$$(1) \qquad z = t + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \ldots + \alpha_m z^m = \varphi(z);$$

lorsque le module de t est inférieur à $\frac{r}{2}$, cette équation admet une racine z donnée par le développement en série

$$(3) \qquad z = \sum_{n=1}^{n=\infty} [\varphi(z_n) - \varphi(z_{n-1})],$$

dans lequel les termes sont des polynomes entiers en t, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$; le module du terme général est inférieur à $\frac{1}{2^n}$, donc cette série est uniformément convergente pour $|t| < \frac{r}{2}$ et la somme z est une fonction continue de la variable t dans le cercle $|t| < \frac{r}{2}$.

[1] On pourrait aussi joindre le point Q au point O par un arc de courbe ne rencontrant aucun point P_i et répéter sur l'arc OQ le raisonnement fait au début sur le segment rectiligne OQ.

Cette racine est la seule dont le module soit inférieur à r. Soit en effet ζ une autre racine de module inférieur à r; on a $\zeta = \varphi(\zeta)$, donc

$$z_{n+1} - \zeta = \sum_{k=2}^{k=m} \alpha_k (z_n^k - \zeta^k);$$

par suite,

$$|z_{n+1} - \zeta| < |z_n - \zeta| \times \sum_{k=2}^{k=m} k\alpha'_k r < \frac{1}{2} |z_n - \zeta|,$$

d'où

$$|z_{n+1} - \zeta| < \frac{1}{2^n} (z_1 - \zeta);$$

donc la suite $z_n - \zeta$ a pour limite o lorsque n croît indéfiniment, c'est-à-dire que $z = \zeta$, ce qui contredirait l'hypothèse. La racine z est d'ailleurs une racine simple : en effet, une racine multiple de l'équation (1)

$$z = \varphi(z)$$

devrait vérifier l'équation

$$1 = \varphi'(z);$$

or, puisque $|z|$ est inférieur à r, on a

$$|\varphi'(z)| < \sum_{k=2}^{k=m} k\alpha'_k r < \frac{1}{2},$$

donc $\varphi'(z)$ ne peut être égal à l'unité.

Le terme général de la série (3) est un polynome entier en t, α_2, α_3, ..., α_m; supposons que les α_i varient de manière à toujours vérifier l'inégalité

$$\sum_{k=2}^{k=m} k\alpha'_k < \text{M};$$

on en déduit que la racine z est une fonction continue

des variables t, α_2, ..., α_m dans le voisinage des valeurs initiales.

Passons maintenant à l'équation (2); la valeur de $z - z_0$ est donnée par la série placée au second membre de l'égalité (3) dans laquelle on a fait les substitutions

$$t = -\frac{u - u_0}{f'_z(z_0, u_0)}, \qquad \alpha_i = -\frac{f_{z^i}^{(i)}(z_0, u_0)}{i!\, f'_z(z_0, u_0)}.$$

La racine z est donc fournie par une série dont les termes sont des fractions rationnelles par rapport aux coefficients u, a_1, a_2, ..., a_m de l'équation. Supposons que ces coefficients varient de manière à satisfaire aux inégalités

$$\sum_{k=2}^{k=m} k\alpha'_k < \mathrm{M}, \qquad \left|\frac{u - u_0}{f'_z(a_0, u_0)}\right| < \frac{r}{2},$$

on en conclut que, *si l'équation* (2) *a une racine simple pour*

$$u = u_0, \qquad a_1 = a_1^0, \qquad \ldots, \qquad a_m = a_m^0,$$

elle admet une racine simple unique voisine de la première, lorsque les coefficients u, a_1, ..., a_m *sont voisins de* u_0, a_1^0, ..., a_m^0, *et cette racine est une fonction continue des coefficients.*

Remarquons enfin que, si les coefficients sont réels, les termes des séries ont aussi leurs coefficients réels et leur somme est réelle : donc, *si l'équation* (2), *supposée à coefficients réels, admet, pour des valeurs déterminées des coefficients, une racine simple réelle, elle admet aussi une racine simple réelle et continue pour des valeurs voisines de ces coefficients.*

6. Le mode de raisonnement qui nous a servi dans la démonstration du théorème de d'Alembert peut

aussi être utile dans un certain nombre de questions relatives à la continuité des racines d'une équation algébrique.

Supposons, par exemple, que les coefficients de l'équation

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m = 0$$

soient des fonctions continues réelles de deux variables réelles x et y, des polynomes par exemple, et proposons-nous de déterminer le nombre des racines réelles de cette équation suivant la position occupée par le point P, de coordonnées x, y dans un plan rapporté à deux axes Ox, Oy. D'abord, si au point P l'équation a toutes ses racines simples, le nombre des racines réelles est le même pour le point P et pour les points voisins de P.

Construisons alors la courbe C, lieu des points P pour lesquels l'équation a une racine double; cette courbe partage le plan en régions et je dis que, dans chacune de ces régions, le nombre des racines réelles demeure le même. Soient en effet A et B deux points appartenant à la même région; je vais démontrer que le nombre des racines réelles est le même en A et en B : supposons qu'il n'en soit pas ainsi et traçons le segment AB. Admettons d'abord que ce segment ne traverse pas la courbe C et désignons par A_1 le milieu de AB. L'un au moins des deux segments AA_1 ou A_1B est tel que le nombre des racines réelles n'est pas le même à ses deux extrémités. Je remplace le segment AB par l'un de ces segments, de longueur moitié moindre, que j'appelle A_1B_1 ; j'opère de la même manière sur le segment A_1B_1 et je le remplace par un nouveau segment A_2B_2, etc. Je construis par ce procédé une suite infinie de segments emboîtés AB, A_1B_1, A_2B_2,...

qui ont un point limite P. D'après la définition de ce point, il y a dans son voisinage des points A_i et B_i pour lesquels les nombres des racines réelles sont différents. Or ce résultat est en contradiction avec la remarque que nous avons faite au début, car, le point P n'étant pas situé sur la courbe C, l'équation n'a que des racines simples en ce point et par suite le nombre de celles de ces racines qui sont réelles est le même pour tous les points voisins de P. Admettons maintenant que le segment AB rencontre C, nous irons de A en B par une ligne polygonale dont les côtés seront assez petits pour que cette ligne ne rencontre pas C. Pour deux sommets consécutifs de cette ligne polygonale, le nombre des racines réelles est le même; donc il est le même aux deux extrémités de la ligne. L'application du résultat précédent aux surfaces algébriques est évidente.

7. Considérons encore l'équation

$$a_0(x) + a_1(x)y + \ldots + a_m(x)y^m = 0$$

dont les coefficients sont des polynomes entiers en x à coefficients réels et qui représente par conséquent une courbe algébrique L. Marquons sur l'axe des x toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles l'équation admet une racine multiple en y. En appliquant aux segments ainsi déterminés sur l'axe des x le raisonnement qu'on a fait tout à l'heure pour le segment AB, on établirait que le nombre des racines réelles de l'équation en y demeure le même lorsque x reste à l'intérieur de l'un de ces segments. On déduit aisément de là, par un raisonnement classique, que le nombre des branches de la courbe L qui aboutissent en un point simple ou multiple de cette courbe est toujours pair. La

même méthode, appliquée aux coefficients angulaires des tangentes en un point quelconque de la courbe, montrerait, de la même manière, que le nombre des branches tangentes à une même droite en un point donné est toujours pair. On démontre ainsi *qu'une courbe algébrique n'a ni point d'arrêt ni point anguleux*.

On voit que ces démonstrations ne supposent pas qu'on ait établi au préalable le théorème général de la continuité des fonctions algébriques, mais seulement la proposition relative à l'existence d'une racine simple, c'est-à-dire le théorème d'existence des fonctions implicites.

[O¹2q]

SUR QUELQUES APPLICATIONS DES COORDONNÉES INTRINSÈQUES;

Par M. L. BRAUDE, à Bierstadt-Wiesbaden.

I.

1. En divisant les rayons de courbure d'une courbe plane (C) en un rapport constant donné (λ), de sorte que $\lambda = \infty$ corresponde à la courbe (C) elle-même, $\lambda = 0$ à sa développée, on aura [1] comme lieu du

---

[1] L. Braude, *Ueber einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve* (Heidelberg, 1911); *Ueber die Kurven, unter deren Zwischenevoluten sich Kreise befinden* (*Monatshefte für Math. und Physik*, Vienne, t. XXIII, 1912, p. 283-288). — F.-G. Teixeira, *Sur les courbes à développée intermédiaire circulaire* (*Monatshefte*, t. XXIV, 1913, p. 347-354). — E. Turrière, *Généralisation des courbes de Ribaucour* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. XIII, juin 1913). — L. Braude, *Les déve-*

point diviseur une courbe associée que j'ai désignée comme *développée intermédiaire* (λ) [Zwischenevolute (λ)]. On peut se servir de ces dérivées pour simplifier la construction du rayon de courbure, pour rectifier des courbes bien connues, enfin comme bases curvilignes pour une génération uniforme de (C) infinie de l'ordre 2 ou pour une autre génération de (C) infinie du premier ordre ([1]).

Comme la normale de la développée intermédiaire (λ) de (C) contient toujours le point diviseur correspondant du rayon de courbure R_1 de la développée (C_1) et comme la normale d'une roulette passe toujours par le point de contact du profil générateur et de la base curviligne, *nous allons déterminer la courbe* M_λ, *qu'il convient de faire rouler sur la développée intermédiaire* (λ) *de* (C_1), *pour avoir comme roulette d'un point immobile la développée intermédiaire* (λ) *de la courbe* (C).

2. La normale du point courant A de (C) forme avec celle du point correspondant P_λ de la développée intermédiaire (λ) de (C) un angle φ, pour lequel on a ([2])

$$\tag{1} \operatorname{tang}\varphi = \frac{R_1}{\lambda R} = \frac{dR}{\lambda\, ds}.$$

De même l'angle φ_1 de la normale du point diviseur P'_λ de R_1 avec celle de (C_1) est déterminé par

$$\tag{2} \operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{R_2}{\lambda R_1} = \frac{dR_1}{\lambda\, dR},$$

La tangente $P_\lambda Q$ de P_1 forme donc avec P'_λ

loppées imparfaites des spirales sinusoïdes, des courbes de Ribaucour et des coniques (*Giornale di Mat. di Battaglini*, t. L, 1912, p. 310-328).

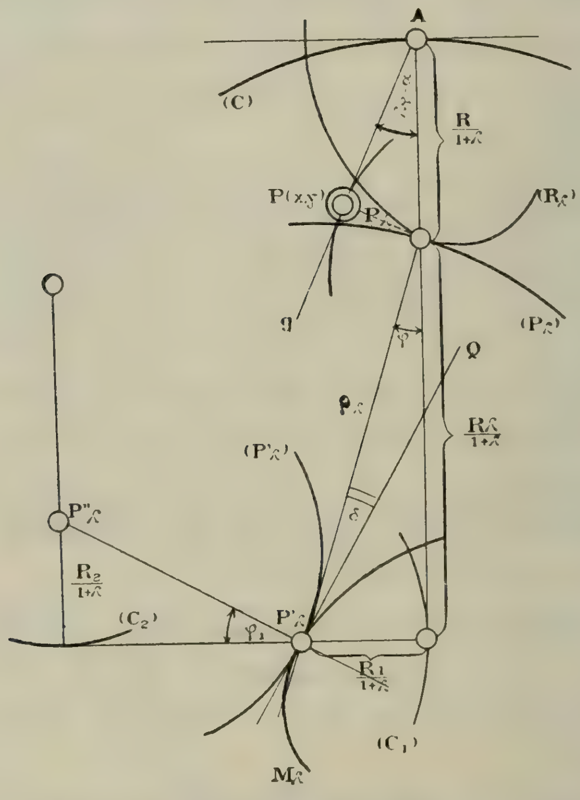
([1]) L. BRAUDE, *Thèse*, p. 14 et 48.

([2]) L. BRAUDE, *Thèse*, p. 15.

l'angle

(3) $$\vartheta = \sphericalangle P_\lambda P'_\lambda Q = \varphi_1 - \varphi.$$

Pour la courbe M_λ on a donc les trois propriétés :



1° L'arc s_λ est égal à celui de (P_λ), savoir [1]

(4) $$s_\lambda = \frac{1}{1+\lambda} \int \sqrt{\lambda^2 dR^2 + dR_1^2};$$

2° L'angle entre le rayon vecteur et la tangente est

(5) $$\vartheta = \varphi_1 - \varphi;$$

3° Le rayon vecteur $P_\lambda P'_\lambda = \rho_\lambda$, où

(6) $$\rho_\lambda = \frac{\sqrt{\lambda^2 R^2 + R_1^2}}{1+\lambda}.$$

---

[1] L. BRAUDE, *Thèse*, p. 14.

On aura donc les coordonnées polaires ρ, ω de M_λ par application de deux équations de ces trois ; on a, par exemple,

$$\operatorname{tang} \mathfrak{S} = \rho \frac{d\omega}{d\rho}$$

ou, en appliquant (1) et (3),

$$\rho \frac{d\omega}{d\rho} = \frac{\lambda(RR_2 - R_1^2)}{R_1(\lambda^2 R^2 + R_1^2)}; \tag{7}$$

en introduisant encore ρ et $d\rho$ suivant l'équation (6), on aura

$$d\omega = \frac{ds}{R} \frac{\lambda(RR_2 - R_1^2)}{\lambda^2 R^2 + R_1^2}; \tag{7'}$$

d'où il résulte [1]

$$\omega = \operatorname{arc\,tang} \frac{R_1}{\lambda R}. \tag{8}$$

Suivant les coordonnées polaires de M_λ, représentées par (6) et (8), on aura facilement les coordonnées cartésiennes, savoir :

$$x = \frac{\lambda R}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{R_1}{1 + \lambda}. \tag{9}$$

Soit l'équation intrinsèque de (C)

$$f(s, R) = 0; \tag{10}$$

celle de (C_1) :

$$f_1(R, R_1) = 0; \tag{11}$$

On appelle [2] donc la courbe à l'équation carté-

---

[1] L. Braude, *Thèse*, p. 22.

[2] A. Mannheim, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 501. Paris, Gauthier-Villars, 1895. — H. Wieleitner, *Spezielle ebene Kurven* (*Sammlung Schubert*, t. LVI, p. 227; Leipzig, Gœschen, 1906).

sienne

(12) $$f_1(x, y) = 0$$

la *courbe de Mannheim à base rectiligne de* (C).

De là il résulte :

Quand on fait rouler sur la développée intermédiaire (λ) *de* (C_1) [(C_1) étant représentée par $f_1(s, R) = 0$] *la courbe à l'équation cartésienne*

(13) $$f_1\left[\frac{x(1+\lambda)}{\lambda}, y(1+\lambda)\right] = 0,$$

on aura comme roulette d'un point quelconque de l'axe des x la développée intermédiaire (λ) *d'une développante de* (C_1) ; *l'enveloppe de l'axe des x est la courbe* (C_1) *elle-même* [1]. Sur les développées intermédiaires (λ) et (— λ) on fait rouler deux courbes semblables dans le rapport $1 - \lambda : 1 + \lambda$.

3. L'équation intrinsèque de (C) étant [2]

(14) $$s = m \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{c}\right)^{2n} - 1}},$$

on peut la remplacer par les deux équations

(15) $$\begin{cases} s = c \int \sin^{-\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{m}\varphi\right) d\varphi, \\ R = c \sin^{-\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{m}\varphi\right). \end{cases}$$

Alors, sur la développée intermédiaire (λ) de la dé-

---

(1) *Thèse*, p. 48.

(2) G. LORIA, *Spezielle ebene Kurven*, 2e édition, Leipzig, G.-B. Teubner, 1911, t. II, p. 295.

veloppée, il faut faire rouler la courbe

$$(16)\quad \begin{cases} x = \dfrac{c\lambda}{1+\lambda}\sin^{-\frac{1}{n}}\omega, \\ y = \dfrac{c}{m(1+\lambda)}\sin^{-\left(\frac{1}{n}+1\right)}\omega\cos\omega \end{cases} \qquad \left(\frac{n}{m}\omega = \varphi\right).$$

Si $\lambda = \pm\dfrac{1}{m}$, cette courbe est une *courbe multiplicatrice* de Clairaut ([1]).

En faisant $n = 1$, on aura comme courbe (14) une *épicycloïde*, qui a la représentation usuelle ([2])

$$(17)\quad \begin{cases} x = r\left[\dfrac{1+m}{m}\cos m\varphi - \cos(1+m)\varphi\right], \\ y = r\left[\dfrac{1+m}{m}\sin m\varphi - \sin(1+m)\varphi\right]. \end{cases}$$

Celle de *la développée intermédiaire* (λ), c'est-à-dire d'une *épitrochoïde* ([3]) de même module, est alors

$$(18)\quad \begin{cases} x_1 = r_1\left[\dfrac{1+m}{m}\cos m\varphi - \dfrac{h_1}{r_1}\cos(1+m)\varphi\right], \\ y_1 = r_1\left[\dfrac{1+m}{m}\sin m\varphi - \dfrac{h_1}{r_1}\sin(1+m)\varphi\right]. \end{cases}$$

où

$$(18')\quad r_1 = r\frac{\lambda(2m+1)+1}{(\lambda+1)(2m+1)}, \qquad h_1 = r\frac{\lambda(2m+1)-1}{(\lambda+1)(2m+1)}.$$

([1]) G. Loria, *loc. cit.*, t. II, p. 379. — C. de Jans, *Les multiplitions de Clairaut* (Gand, 1912). — L. Braude, *Ueber Roll- und Fusspunktkurven* (*Rend. Circ. mat. Pal.*, t. XXXIV, 1913, p. 286); *Die Teilkurven der Polarnormale und Polartangente* (*Ibid.*, t. XXXIV, 1913, p. 127-139).

([2]) Serret-Scheffers, *Differential- und Integralrechnung*, 2e édition, t. I, p. 390. Leipzig, Teubner, 1905.

([3]) H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 230. — F.-G. Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, t. II, p. 202 (Coïmbre, 1909). — L. Braude, *Thèse*, p. 25.

La courbe (17) étant semblable à sa développée, on aura le théorème général :

Quand on fait rouler l'ellipse

$$(19) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2} + y^2(2m+1)^2 = \left[\frac{2r(m+1)}{\lambda+1}\right]^2$$

sur l'épicycloïde allongée ou raccourcie (18), *on aura comme roulette du centre une trochoïde semblable à la base curviligne; en remplaçant* (λ) *par* ($-\lambda$), *on aura une seconde génération par le roulement d'une ellipse semblable sur une autre épitrochoïde.*

Exemples. — *a.* Si $2m+1=3$, c'est-à-dire $m_1 = 1$ ou $m_2 = -2$, la courbe (17) est une *cardioide* [1], dont les développées intermédiaires sont des *limaçons de Pascal;* de là il résulte :

En faisant rouler l'ellipse

$$(20) \qquad x^2 + 9\lambda^2 y^2 = \left(\frac{a\lambda}{1+\lambda}\right)^2$$

sur le limaçon de Pascal

$$(21) \qquad \rho = \frac{a}{12(1+\lambda)}[3\lambda + 1 + (3\lambda - 1)\cos\varphi],$$

ce qui est la développée intermédiaire (λ) *de la cardioïde*

$$(21') \qquad r = \frac{a}{4}(1+\cos\varphi) \qquad \text{ou} \qquad 9R^2 + s^2 = a^2,$$

on aura comme roulette du centre un limaçon qui

---

[1] G. Loria, *loc. cit.*, t. I, p. 152. — H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 133. — R.-C. Archibald, *The cardioïde and some of its related, Curves*, p. 28 (*Thèse*, Strasbourg, 1900).

est à (21) *comme* 3 : 1; *l'enveloppe de l'axe des x est la cardioïde* (21′).

b. La cycloïde ($m = 0$) étant congruente à ses développées successives, il résulte :

Quand on fait rouler l'ellipse

$$\frac{x^2}{4(r+h)^2} + \frac{y}{4(r-h)^2} = 1 \tag{22}$$

sur la trochoïde (¹)

$$x = r\varphi - h\sin\varphi, \qquad y = r - h\cos\varphi, \tag{22'}$$

la roulette du centre de (22) *est une trochoïde congruente, représentant la développée intermédiaire* $\lambda = \frac{r+h}{r-h}$ *de la cycloïde*

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = r(1 - \cos\varphi). \tag{22''}$$

c. Les développées intermédiaires des para- et des hypercycloïdes

$$\frac{s^2}{a^2} - \frac{R^2}{b^2} = \pm 1, \tag{23}$$

sont des para- ou des hypertrochoïdes, sur lesquelles il faut faire rouler des hyperboles, pour avoir comme roulette du centre des hyper- ou des paratrochoïdes.

4. Le théorème général au nº **2** contient encore quelques autres cas remarquables. Si $\lambda = 0$ ou $\lambda = \infty$, l'équation (9) représente l'axe des y ou des x, qu'il faut faire rouler sur la développée pour engendrer la développante comme roulette d'un point situé sur cet

(¹) L. Braude, *Giorn. di Batt.* (*loc. cit.*).

axe. Sur la *développée moyenne* ($\lambda = 1$) de C, on fait rouler une courbe semblable à la courbe de Mannheim de C dans le rapport 1 : 2. En posant $x' = x(1+\lambda)$, $y' = y(1+\lambda)$, et alors $\lim \lambda = -1$, on aura par un passage à la limite la *radiale* — lieu des points extrêmes des rayons équipollents aux rayons de courbure — ; la courbe (9) est alors la courbe de Mannheim et nous aurons le théorème dérivé d'une autre manière par l'auteur dans un autre article [1] :

Quand on fait rouler la courbe de Mannheim de C *sur la radiale, de sorte que l'axe des x passe toujours par le pôle, on aura comme roulette d'un point de l'axe des x la radiale d'une développante de* C.

Pour les *épi- ou les hypocycloïdes* on fait rouler une certaine *ellipse* (E) sur une *rhodonée* (R), alors la roulette du centre est une *rhodonée* semblable (R′), celle d'un autre point de l'axe des x est une conchoïde de (R′). Mais comme [2] la développée intermédiaire $\lambda = -\frac{1}{(2m+1)^2}$ de (17) est une *rhodonée* semblable à la radiale, on aura encore une *autre génération des rhodonées et de leurs conchoïdes* toute semblable à la première.

Si $\lambda = \pm \frac{1}{2m+1}$, la développée intermédiaire [3] est le cercle fixe, sur lequel il faut faire rouler comme courbe (9) une circonférence, pour avoir la cycloïdale elle-même comme enveloppe de l'axe des x, c'est-à-dire

---

(1) L. Braude, *Rend. Circ. mat. Pal.*, t. XXXIV, 1913, p. 138.

(2) L. Braude, *Thèse*, p. 25.

(3) *Thèse*, p. 15. *Voir* aussi E. Turrière, *Sur la courbure des lignes et des surfaces* (*Rend. Circ. mat. Pal.*, t. XXXVI, 1913).

d'un diamètre ([1]). La roulette du centre est un cercle concentrique, mené par les rebroussements de la développante semblable, celle des points extrêmes de ce diamètre est une cycloïdale, qui est la développée intermédiaire $\lambda = \pm \frac{1}{2m+1}$ de la *développante à points triples* ([2]).

La roulette d'un point quelconque du diamètre étant une trochoïdale du même module, il résulte :

Les développées intermédiaires

$$\lambda = \pm \frac{1}{2m+1} \left(= \pm \frac{b}{a} \right)$$

des courbes parallèles de la cycloïdale (17) *sont deux trochoïdales, sur lesquelles il faut faire rouler toujours deux limaçons de Pascal ou deux cycloïdes allongées ou raccourcies pour engendrer la développante comme roulette du pôle ou comme enveloppe de l'axe des* x.

Pour les développantes de la néphroïde de Proctor (épicycloïde à deux rebroussements), *les développées intermédiaires sont deux limaçons de Pascal, dont nous en avions trouvé l'un dans un autre article* ([3]).

De même, pour les astroïdes obliques (développantes de l'astroïde régulière) la développée intermédiaire $\lambda = -2$ est une certaine trochoïde, la développée

---

([1]) A. Mannheim, *Géom. cinémat.*, p. 11. — H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 206.

([2]) L. Braude, *Thèse*, p. 43; *Ueber Parallelkurven von Epi- und Hypozykloïden* (*Monatshefte*, Vienne, t. XXIV, 1913, surtout p. 192); Question dans l'*Intermédiaire*, t. XIX, 1912, p. 217; Réponses, t. XX, 1913, p. 31 et 108.

([3]) *Voir* la note précédente, *Monatshefte*, p. 195.

intermédiaire $\lambda = 2$ est une *ellipse, sur laquelle on fait rouler le limaçon pour engendrer l'astroïde oblique comme roulette;* pour l'astroïde régulière l'ellipse est un cercle, pour l'astroïde à deux points triples, on aura un diamètre, sur lequel on fait rouler une cardioïde [1].

Enfin pour *les para- ou les hypercycloïdes* [2] les développées intermédiaires sont des para- ou des hypertrochoïdes ; pour le roulement mentionné le profil générateur est une hyperbole, la roulette du centre est une hyper- ou une paratrochoïde.

Si, par exemple, la base curviligne est une *Summen-* ou *Differenzenspirale* [3]

$$r = a(e^{m\varphi} \pm e^{-m\varphi}), \tag{24}$$

la roulette est une *Differenzen-* ou *Summenspirale.*

II.

5. Regardons quelques exemples d'une génération uniforme des courbes, mentionnée dans un autre article [4] :

Nous allons déterminer pour quelques courbes (C) *la courbe* Φ_λ, *qu'il faut faire rouler sur le lieu du point* P_λ, *divisant la normale polaire de* (C) *dans un rapport constant* $\lambda : 1$, *pour avoir comme roulette la courbe* (C) *elle-même.*

Les coordonnées polaires de Φ_λ sont [après deux

(1) H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 302.

(2) G. Loria, *loc. cit.*, t. II, p. 119. — F.-G. Teixeira, *loc. cit.*, t. II, p. 218. — H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 211.

(3) G. Loria, *loc. cit.*, t. II. p. 68. — H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 262.

(4) L. Braude, *Rend. Circ. mat. Pal.*, t. XXXIV, 1913, p. 138.

corrections des équations (66) et (69) de l'article que nous venons de citer]

$$(25)\qquad \rho = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{1+\lambda}, \qquad \varphi = \lambda\omega + \text{arc tang}\frac{r'}{r},$$

d'où l'on aura les coordonnées cartésiennes, savoir :

$$(25')\qquad x = \frac{r\cos\lambda\omega - r'\sin\lambda\omega}{\lambda+1}, \qquad y = \frac{r\sin\lambda\omega + r'\cos\lambda\omega}{1+\lambda}.$$

Soit donc (C) la *rhodonée*

$$(26)\qquad r = a\sin m\omega;$$

les coordonnées polaires de (Φ_λ) sont

$$(26')\qquad \begin{cases} \rho = \dfrac{a}{1+\lambda}\sqrt{\sin^2 m\varphi + m^2\cos^2 m\varphi}, \\ \varphi = \lambda\omega \mp \text{arc tang}(m\cot m\omega); \end{cases}$$

les coordonnées cartésiennes

$$(26'')\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a}{1+\lambda}(\cos\lambda\omega\sin m\omega - m\sin\lambda\omega\cos m\omega), \\ y = \dfrac{a}{1+\lambda}(\sin\lambda\omega\sin m\omega + m\cos\lambda\omega\cos m\omega). \end{cases}$$

Par décomposition des produits de fonctions en sommes, on les reconnaît bien comme celles d'une *épitrochoïde* [1].

Les coordonnées intrinsèques sont :

$$(27)\qquad \begin{cases} s' = \dfrac{a}{1+\lambda}\displaystyle\int d\omega\sqrt{(\lambda-1)^2 m^2\cos^2 m\omega + (\lambda - m^2)^2\sin^2 m\omega}, \\ R' = \dfrac{a}{1+\lambda}\dfrac{[(\lambda-1)^2 m^2\cos^2 m\omega + (\lambda-m^2)^2\sin^2 m\omega]^{\frac{3}{2}}}{\left[\begin{array}{l}(\lambda-1)^2 m^2\cos^2 m\omega \\ \quad + (\lambda - m^2)\sin^2 m\omega + (\lambda-1)(\lambda-m^2)m^2\end{array}\right]}, \end{cases}$$

---

[1] G. Loria, *loc. cit.* t. I, p. 358. — F.-G. Teixeira, *loc. cit.*, t. II, p. 211.

d'où il résulte :

Quand on fait rouler sur la trochoïdale

$$(28)\quad \begin{cases} x = \dfrac{a}{1+\lambda}(\lambda \sin m\psi \cos\psi - m \cos m\psi \sin\psi), \\ y = \dfrac{a}{1+\lambda}(\lambda \sin m\psi \sin\psi + m \cos m\psi \cos\psi), \end{cases}$$

la trochoïdale (27), *on aura la rhodonée* (26) *comme roulette du centre de la base circulaire.* Si $\lambda = 1$, on aura comme base curviligne et comme profil générateur deux *cycloïdales* congruentes, représentées par

$$(29)\qquad m^2 s^2 + R^2 = \left[\frac{a(1-m^2)}{2}\right]^2.$$

En faisant de même $\lambda = m^2$, on aura comme courbe fixe la cycloïdale

$$(29')\qquad m^2 s'^2 + R'^2 = \left[\frac{a\, m^2(1-m^2)}{1+m^2}\right]^2,$$

sur laquelle il faut faire rouler la courbe (C'), représentée, suivant les équations (27), par les coordonnées intrinsèques :

$$(30)\qquad s'' = \frac{a(1-m^2)m}{1+m^2}\sin m\varphi, \qquad R'' = \frac{a(1-m^2)}{1+m^2}\cos m\varphi,$$

ou par l'équation intrinsèque

$$(31)\qquad s''^2 + m^2 R''^2 = \left[\frac{a(1-m^2)m}{1+m^2}\right]^2.$$

Cette courbe (C') est donc une *symétrique intrinsèque* (¹) de (29).

(¹) L. Braude, *Thèse*, p. 20; inversement, par le roulement des radiales de ces courbes, c'est-à-dire des deux rhodonées $r = c \sin n\varphi$ et $r_1 = \dfrac{c}{n^2}\sin\dfrac{\varphi}{n}$, on aura comme roulettes des pôles les cycloïdales correspondantes (voir *Thèse*, p. 50).

Exemples. — *a*. Si $m = 2$, on fait rouler sur l'astroïde ([1])

$$4s^2 + R^2 = a^2 \tag{32}$$

une courbe congruente, pour avoir comme roulette du centre la rosace à quatre feuilles; en faisant rouler la néphroïde

$$4s^2 + 16R^2 = a^2, \tag{33}$$

on aura de même cette rosace; en faisant rouler l'astroïde sur la néphroïde, on aura la rosace du module $\frac{1}{2}$.

b. Quand on fait rouler $\left(m = \frac{1}{3}\right)$, la *cardioïde*

$$s^2 + 9R^2 = a^2, \tag{34}$$

sur *l'hypocycloïde tricuspidale* ([2]) (en courbure opposée), on aura comme roulette un *trifolium régulier;* par inversion du roulement, on aura une *rhodonée* du module $\frac{1}{3}$, qui est en même temps un *limaçon de Pascal*.

c. Sur la *campyle d'Eudoxe* ([3]) (radiale de la chaînette)

$$\rho = \frac{a}{\sin^2 \varphi},$$

il faut faire rouler la parabole

$$y = a + \frac{x^2}{a} \tag{35}$$

([1]) H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 129. — G. Loria, *loc. cit.*, t. I, p. 266. — F.-G. Teixeira, *loc. cit.*, t. I, p. 328.

([2]) G. Loria, *loc. cit.*, t. I. p. 151. — F.-G. Teixeira, *loc. cit.*, t. I, p. 174. — H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 142.

([3]) G. Loria, *loc. cit.*, t. I, p. 383. — H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 71.

pour engendrer comme roulette de l'origine la courbe de Cappa (radiale de la tractrice) [1]

$$r = \operatorname{tang} \varphi.$$

d. Quand on fait rouler la trochoïde

$$(36) \qquad x = r\varphi - h \sin\varphi, \qquad y = r - h\cos\varphi$$

sur le limaçon de Pascal

$$(36') \qquad \rho = r - h\cos\varphi,$$

de sorte que, suivant le théorème de *Habich*, l'axe des x passe toujours par le pôle du limaçon [2], on aura comme roulette d'un point immobile sur l'axe des x la podaire d'une développante du cercle

$$(36'') \qquad \rho' = r\varphi - h\sin\varphi.$$

De même quand on fait rouler le limaçon (36′) en courbure opposée sur la trochoïde (36), la roulette du pôle est une développante de la cycloïde, pour laquelle (36) est la *développée moyenne* ($\lambda = 1$); le cas spécial $r = h$ est traité dans notre article cité.

III.

6. Regardons encore une autre application des *développées intermédiaires* pour engendrer un système de ∞^2 courbes dérivées. Sur la développée intermédiaire (λ) de la courbe à l'équation intrinsèque

$$(37) \qquad (C) \equiv f(R, \varphi) = 0,$$

(1) G. Loria, *loc. cit.*, t. I, p. 196. — H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 74. — F.-G. Teixeira, *loc. cit.*, t. I, p. 274.

(2) H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 308, 311.

faut faire rouler la courbe d'équation polaire

$$(R_\lambda) \equiv f\left[r(1+\lambda), \frac{\varphi}{\lambda}\right] = 0, \tag{37'}$$

pour avoir (C) comme roulette du pôle ([1]). C'est la radiale d'une *courbe à courbure proportionnelle* (C_λ), dont nous avons appliqué la courbe de Mannheim M_λ dans la première partie de cet article. L'angle polaire de (37') correspondant au point de contact

$$P_\lambda\left(x = 0, y = \frac{R}{1+\lambda}\right)$$

est égal à $\lambda\varphi$; une droite g menée par le pôle de (37') forme donc avec la tangente de (C) l'angle $\lambda\varphi - \alpha$, où α est une constante arbitraire, déterminée par le choix de g. L'équation de g dans le système (tangente, normale) de (C) est donc ([2])

$$g \equiv y - x \operatorname{tang}(\lambda\varphi - \alpha) = 0. \tag{38}$$

Pour avoir les coordonnées x, y du point de contact, il faut dériver cette équation $f(x, y, s) = 0$ sous la forme

$$(y - R)\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial s} = 0, \tag{39}$$

la déviation φ étant, suivant l'équation intrinsèque de (C), donnée comme fonction de l'arc s. On aura donc

$$(y - R)\operatorname{tang}(\lambda\varphi - \alpha) + x\left[1 + \frac{\lambda}{\cos^2(\lambda\varphi - \alpha)}\right] = 0; \tag{40}$$

([1]) *Thèse*, p. 48.

([2]) Cesàro, *Lezioni di Geometria intrinseca*, p. 20 (Napoli, 1906); édition allemande, par G. Kowalewski (Leipzig, Teubner, 1900, p. 21). — H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 173.

de (38) et (40) il résulte

$$(41)\quad \begin{cases} x = \dfrac{R}{1+\lambda}\sin(\lambda\varphi-\alpha)\cos(\lambda\varphi-\alpha), \\ y = \dfrac{R}{1+\lambda}\sin^2(\lambda\varphi-\alpha). \end{cases}$$

La distance r du point de contact $P(x, y)$ et du point correspondant $P_0(x=0, y=0)$ de (C) étant

$$(42)\qquad r = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{R}{1+\lambda}\sin(\lambda\varphi-\alpha),$$

on aura $P(x, y)$ comme projection du point

$$P'\left(x=0, y=\frac{R}{1+\lambda}\right)$$

sur la droite g. P' est le point correspondant de la développée intermédiaire (λ).

Par application des formules de Cesàro, il résulte

$$(43)\qquad \frac{\delta x}{ds} = k\cos(\lambda\varphi-\alpha), \qquad \frac{\delta y}{ds} = k\sin(\lambda\varphi-\alpha),$$

où

$$(44)\quad \begin{cases} k = \dfrac{1}{R(1+\lambda)}[R_1\sin(\lambda\varphi-\alpha)+(2\lambda+1)R\cos(\lambda\varphi-\alpha)], \\ \vartheta = \text{arc tang}\,\dfrac{\delta y}{\delta x} = \lambda\varphi-\alpha. \end{cases}$$

Les coordonnées intrinsèques $\bar{s}$, $\bar{R}$ de l'enveloppe $E_{\lambda,\alpha}$ de g sont donc

$$(45)\quad \begin{cases} \bar{s} = \displaystyle\int k\,ds = \frac{1}{1+\lambda}\int d\varphi[R_1\sin(\lambda\varphi-\alpha) \\ \qquad\qquad + (2\lambda+1)R\cos(\lambda\varphi-\alpha)], \\ \bar{R} = \dfrac{Rk}{\lambda+1} = \dfrac{1}{(1+\lambda)^2}[R_1\sin(\lambda\varphi-\alpha) \\ \qquad\qquad + (2\lambda+1)R\cos(\lambda\varphi-\alpha)], \\ \bar{\psi} = \displaystyle\int \frac{d\bar{s}}{\bar{R}} = (\lambda+1)\varphi-\alpha. \end{cases}$$

On a discuté cette dérivée comme *causticoïde* de (C) en appliquant l'équation magique

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - f(\varphi) = 0$$

de (C) (¹). Si $\lambda = 1$ on aura la *caustique* proprement dite pour laquelle la construction du point de contact est bien connue (²); si $\lambda = -\frac{1}{2}$, on aura la *catacaustique*; si $\lambda = 0$ la dérivée est une *développoïde* (³), alors la construction du point $P(x, y)$ est celle de Réaumur.

Nos recherches sur les développées intermédiaires nous font déterminer les courbes, *pour lesquelles le rayon de courbure de la causticoïde* $E_{\lambda,\alpha}$ *est divisé dans un rapport constant par l'intersection de la normale avec celle de* (C); *pour ces courbes une certaine développée intermédiaire de* (C) *est une autre développée intermédiaire de* $E_{\lambda,\alpha}$.

Par application de la *transformation* de M. Koestlin (rotation constante de la tangente variable de $E_{\lambda,\alpha}$ autour de l'intersection avec une autre courbe) (⁴), cette propriété ne cesse pas d'avoir lieu; ici cette courbe de transformation (axe curviligne) est la courbe (C). Soit donc

$$(1 + a) P_\lambda = \overline{R}$$

ou

$$\frac{R_1 \sin(\lambda\varphi - \alpha)}{(\lambda + 1)^2} + \frac{2\lambda + 1}{(\lambda + 1)} R \cos(\lambda\varphi - \alpha) = \frac{a + 1}{\lambda + 1} R \cos(\lambda\varphi - \alpha), \tag{46}$$

(¹) Nils Grane, *Ueber Kurven mit gleichartigen successiven Développoïden*, p. 42 (*Thèse*, Lund, 1894).

(²) G. Loria, *loc. cit.*, t. II, p. 303.

(³) G. Loria, *loc. cit.*, t. II, p. 261. — H. Wieleitner, p. 177.

(⁴) E. Koestlin, *Mitteilungen des Math. Naturwissenschaftlichen Vereins Württemberg*, 2ᵉ série, t. VIII, 1906, p. 72-99.

d'où il résulte

$$(46')\qquad \frac{R_1}{R} = [a(\lambda+1)-\lambda]\,\frac{\cos(\lambda\varphi-\alpha)}{\sin(\lambda\varphi-\alpha)}.$$

Comme $R_1 = \frac{dR}{d\varphi}$, on aura, par une intégration simple,

$$(47)\qquad R' = C\sin^{\frac{a(\lambda+1)-\lambda}{\lambda}}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\psi\right)$$

comme équation intrinsèque (R, ψ) de (C). L'arc étant

$$(47')\qquad s' = \int R'\,d\psi,$$

l'équation intrinsèque (s', R') est

$$(48)\qquad s' = \frac{1}{a(\lambda+1)-\lambda}\int\frac{dR'}{\sqrt{\left(\frac{R}{c}\right)^{\frac{-2\lambda}{a(\lambda+1)-\lambda}}-1}}.$$

C'est donc la même famille de courbes remarquables dont les développées intermédiaires $(\pm\lambda)$ ont une propriété correspondante ([1]). Si $\lambda = -\frac{1}{2}$, on aura les courbes de Ribaucour ([2]); si $a(1+\lambda)-(1-\lambda)=0$, (48) est une *spirale sinusoïde* ([3]); en faisant enfin $2\lambda - a(\lambda+1) = 0$, on aura une cycloïdale représentée par

$$R = c\sin(\lambda\varphi-\alpha),$$

la développée intermédiaire correspondante est *la base circulaire*.

([1]) *Thèse*, p. 23. — G. Loria, *loc. cit.*, t. II, p. 295.

([2]) G. Loria, *loc. cit.*, t. II, p. 295.

([3]) G. Loria, *loc. cit.*, t. II, p. 470. — H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 134. — F.-G. Teixeira, *loc. cit.*, t. II, p. 259.

Regardons comme courbe (C) la cycloïdale

$$(49)\qquad R = \sin m\varphi,$$

alors on aura

$$(50)\qquad \begin{aligned}\overline{R} &= \frac{1}{(1+\lambda)^2}[m\cos m\varphi \sin(\lambda\varphi - \alpha) \\ &\qquad + (2\lambda+1)\sin m\varphi\cos(\lambda\varphi-\alpha)] \\ &= \frac{1}{2(1+\lambda)^2}\{(m+2\lambda+1)\sin[(m+\lambda)\varphi-\alpha] \\ &\qquad + (2\lambda+1-m)\sin[(m-\lambda)\varphi+\alpha]\}.\end{aligned}$$

L'équation intrinsèque est donc

$$(51)\qquad \begin{aligned}\overline{R} = \frac{1}{2(1+\lambda)^2}\Big[&(m+2\lambda+1)\sin\left(\frac{m+\lambda}{\lambda+1}\psi-\alpha\right) \\ &+ (2\lambda+1-m)\sin\left(\frac{m-\lambda}{\lambda+1}\psi+\alpha\right)\Big].\end{aligned}$$

La causticoïde est, suivant la dénomination de l'abbé Aoust ([1]), la *résultante* de deux cycloïdales, dont l'extension ne dépend pas de α; *on l'aura par le roulement de la rhodonée*

$$(52)\qquad \rho = \frac{2r(m+1)}{(\lambda+1)(2m+1)}\sin\frac{\omega}{\lambda(2m+1)}$$

correspondant à l'ellipse (19), *sur la trochoïdale* (18) *comme enveloppe d'une droite, menée par le pôle.*

Si $\lambda = \pm m$, on aura deux développantes d'une cycloïdale, représentées par

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned} &R = \frac{3m+1}{2(m+1)^2}\sin\left(\frac{2m}{m+1}\psi-\alpha\right)+\frac{\sin\alpha}{2(m+1)} \\ &\text{ou} \\ &R = \frac{3m-1}{2(m-1)^2}\sin\left(\frac{2m}{m-1}\psi-\alpha\right)+\frac{\sin\alpha}{2(m-1)};\end{aligned}\right.$$

([1]) Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes planes*, p. 53. Paris, Gauthier-Villars, 1873. — P. Ernst, *Die Aoustsche Resultantenkurve* (*Jahresbericht der K. K. Staatsoberrealschule*, XV,

en faisant $\alpha = 0$, on aura deux cycloïdales. Pour la *cycloïde* proprement dite ($m = 1$), la dérivée est une autre cycloïde, qui est à la première comme 1 : 2.

Chaque deuxième rebroussement de la dérivée est situé dans un rebroussement de la première courbe ([1]).

Pour la *néphroïde* ([2]) $\left(m = \frac{1}{2}\right)$, on aura, en général, une *astroïde oblique ;* elle est régulière

$$\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = C^{\frac{2}{3}}\right) \qquad \text{si } a = 0;$$

si $m = \pm \frac{1}{3}$, les dérivées de la *cardioïde* sont, au premier cas, les développantes d'une *néphroïde*, par exemple une *Cayley-Sextik* ([3]) ; au deuxième cas, on aura un cercle dont le centre est le rebroussement réel. Pour l'hypocycloïde tricuspidale ($m = 3$), la dérivée est une courbe congruente.

De même, si $2\lambda + 1 \pm m = 0$, on aura deux autres cycloïdales représentées par

$$(54) \qquad R = \frac{4m}{(m+1)^2} \sin\left(\frac{3m-1}{m+1}\psi - \alpha\right),$$

$$(55) \qquad R = \frac{4m}{(m-1)^2} \sin\left(\frac{3m+1}{m-1}\psi - \alpha\right).$$

Suivant ce théorème on aura pour la *cycloïde* ($m = 1$) une *cycloïde congruente;* pour *l'hypocycloïde steinérienne*, on aura une *astroïde droite;* la dérivée de la *cardioïde* est une *circonférence* ou une *hypocycloïde*

Vienne, 1909). — *Voir* aussi notre article *Rend. Circ. mat. Pal.*, t. XXXIV, 1912 : *Ueber Roll- und Fusspunktkurven.*

([1]) G. Loria, *loc. cit.*, t. II, p. 305.

([2]) H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 139. — F.-G. Teixeira, *loc. cit.*, t. II, p. 170.

([3]) Archibald, *Thèse*, p. 13. — H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 136.

tricuspidale (1). En appliquant la transformation (45) à une spirale logarithmique, on aura des courbes transcendantes très intéressantes, qui sont à regarder comme généralisations des *cycloïdales* (2). On les aura, en faisant rouler une certaine spirale logarithmique S_1 sur une autre spirale S_2, comme enveloppe d'une droite immobile menée par le pôle de S_1, si les arcs des deux spirales mesurés des deux pôles jusqu'aux points de contact sont égaux. L'équation intrinsèque de ces courbes, que nous appellerons *épilogarithmoïdes* ou *hypologarithmoïdes* suivant que l'équation intrinsèque

$$(56) \qquad R = C e^{m\varphi} \sin n\varphi \qquad (n \gtrless 1),$$

nous fait reconnaître comme cas spécial les cycloïdales ($m = 0$), la *logarithmoïde* de M. E. Koestlin ($n = 1$), qui correspond à la cycloïde ($m = 0$, $n = 1$) et une autre courbe bien intéressante

$$(57) \qquad R = C\varphi e^{m\varphi}$$

qui est une généralisation de la développante du cercle. Nous avons mentionné plusieurs générations de ces courbes dans un article (3) qui paraîtra bientôt dans les *Annales de l'Académie de Porto* (4).

---

(1) G. Loria, *loc. cit.*, t. I, p. 151. — H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 142.

(2) Elles sont mentionnées par G. Loria, *loc. cit.*, t. II, p. 260; de même par N. Grane dans sa Thèse.

(3) L. Braude, *Sur quelques généralisations des transformations de M. Koestlin.*

(4) *Voir* de même notre petite œuvre, qui paraîtra bientôt dans la collection *Scientia* (Paris, Gauthier-Villars), intitulée : *Les coordonnées intrinsèques, théorie et applications.*

[D1]

SUR UNE FORMULE D'APPROXIMATION D'UNE FONCTION DE GRAND NOMBRE;

Par M. J. MALAISE.

On doit à Olinde Rodrigues la formule suivante :

$$\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{n+1} \sin[(n+1)\operatorname{arc}\cos x].$$

Il est aisé de l'établir en partant de la formule qui donne la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction quelconque de x^2

$$\begin{aligned}\frac{d^n\varphi(x^2)}{dx^n} &= (2x)^n\varphi_n(x^2) + n(n-1)(2x)^{n-2}\varphi_{n-1}(x^2) \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4}\varphi_{n-2}(x^2) + \ldots \\ &\quad + \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{p!}(2x)^{n+2p}\varphi_{n-p}(x^2) + \ldots,\end{aligned}$$

où $\varphi_i(x^2)$ désigne la dérivée $i^{\text{ième}}$ de $\varphi(u)$ par rapport à u, dans laquelle on a remplacé u par x^2.

D'autre part, M. Darboux a démontré, dans son célèbre Mémoire *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres*, que si

$$f(z) \equiv (z-\alpha)^k\varphi(z) + \psi(z),$$

où k est *fractionnaire*, on peut, pour la recherche du coefficient de z^n, substituer à $f(x)$ l'une des fonctions

$$\varphi(\alpha)(z-\alpha)^k,$$

$$\left[\varphi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1}\varphi'(\alpha)\right](z-\alpha)^k,$$

. . . .

$$\left[\varphi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1}\varphi'(\alpha) + \ldots + \frac{(z-\alpha)^p}{p!}\varphi_p(\alpha)\right](z-\alpha)^k.$$

L'erreur commise est de l'ordre $\frac{1}{n^p}$.

On a alors pour la valeur a'_n approchée du coefficient de z^n de $f(z)$:

$$(1)\,(^1)\quad \left\{\begin{aligned}\alpha^{k-n}a'_n = {} & \varphi(\alpha)(-1)^n \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}\\ & + \alpha\,\varphi'(\alpha)(-1)^{n+1}\frac{(k+1)k\dots(k-n+2)}{n!}\\ & + \alpha^2\frac{\varphi''(\alpha)}{2!}(-1)^{n+2}\frac{(k+2)\quad\dots(k-n+3)}{n!}\\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ & + \alpha^{p-1}(-1)^{n+p-1}\frac{(k+p-1)\dots(k+p-n)}{n!}\frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{(p-1)!}.\end{aligned}\right.$$

Considérons la fonction génératrice

$$[1-(x+t)^2]^{n+\frac{1}{2}},$$

et remarquons que $\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}$ est le coefficient multiplié par $n!$ de t^n dans le développement de cette fonction.

Supposons que $(1-x)$ et $(1+x)$ aient des modules différents et que $|1-x|<|1+x|$. Il y aura un seul point critique sur le cercle de convergence de la fonction génératrice, à savoir : $1-x$ qui joue ici le rôle de α dans la formule (1). On trouve alors aisément :

$$\begin{aligned}&\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n}\\ &= (-1)^n\Big[2^{\frac{1}{2}}(2n+1)\dots3(1-x)^{\frac{1}{2}}\\ &\qquad - 2^{-\frac{1}{2}}(2n+3)(2n+1)(2n-1)\dots5\frac{(2n+1)}{2}(1-x)^{\frac{3}{2}}\\ &\qquad + 2^{-\frac{3}{2}}(2n+5)\dots7\frac{(2n+1)(2n-1)}{2^2}(1-x)^{\frac{5}{2}}-\dots\Big].\end{aligned}$$

(1) Cette formule est mal imprimée dans le Mémoire cité

Pour n très grand on a, en se bornant au premier terme,

$$\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} = (-1)^n \frac{\sqrt{2}\,(2n+1)!}{2n!}(1-x)^{\frac{1}{2}},$$

et si l'on emploie la formule de Stirling :

$$\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n}$$
$$= (-1)^n \frac{(2n+1)^{2n+1} e^{-(n+1)} (1-x)^{\frac{1}{2}}}{n^n} \sqrt{2+\frac{1}{n}}\,(1+\varepsilon).$$

En comparant ce résultat avec celui de Olinde Rodrigues, on trouve la formule curieuse où ε tend vers zéro quand n grandit :

$$\sin[(n+1)\arc\cos x]$$
$$= \frac{(n+1)(2n+1)^{2n+1} e^{-(n+1)} (1-x)^{\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots(2n+1)\,n^n} \sqrt{2+\frac{1}{n}}\,(1+\varepsilon).$$

AVIS.

Au cinquième Congrès international des Mathématiciens, à Cambridge, il fut décidé que le sixième Congrès se réunirait, en 1916, à Stockholm. Sa Majesté le roi Gustave V fit annoncer, à cette occasion, qu'il serait disposé à mettre ce Congrès sous son haut patronage.

(*Journal de Liouville*, 1878). Il en est de même de quelques autres formules; ainsi, page 15, il faut lire :

$$(6) \qquad f(z) = \frac{A_0(h-1)!}{(\alpha-z)^h} + \frac{A_1(h-2)!}{(\alpha-z)^{h-1}} + \ldots + \varphi(z).$$

En outre, Sa Majesté a résolu d'honorer, par une médaille d'or portant l'image de Karl Weierstrass et par une somme d'argent de 3000 couronnes, quelque importante découverte dans le domaine de la théorie des fonctions analytiques.

Ceux qui désireront concourir pour ce prix devront envoyer leurs manuscrits au rédacteur en chef des *Acta mathematica* avant le 31 octobre 1915, centenaire de la naissance de Karl Weierstrass. Les Mémoires, qui pourront traiter un sujet se rapportant soit à la théorie générale des fonctions analytiques, soit à la théorie d'une classe importante de fonctions particulières, devront porter une épigraphe et être accompagnés du nom et de l'adresse de l'auteur, indiqués ouvertement ou sous pli cacheté. Ils ne devront point avoir été publiés antérieurement.

Sa Majesté a décidé qu'un rapport sur la valeur scientifique des Mémoires envoyés pour répondre à la question mise au concours doit être présenté à Sa Majesté par les membres de la première classe de l'Académie des Sciences de Suède. Ces membres sont actuellement : MM. Mittag-Leffler, Falk, Phragmén, Wiman, Bendixson et von Koch. Aux dits membres sera encore associé M. Fredholm.

Le Mémoire couronné ainsi que les Mémoires qui pourraient être jugés dignes d'être signalés comme particulièrement remarquables seront imprimés dans les *Acta mathematica*. Ils ne devront pas être autrement rendus publics antérieurement.

Les autres Mémoires seront renvoyés à l'adresse que l'auteur aura indiquée dans ce but.

Les Mémoires pourront être écrits en allemand, en anglais ou en français, au choix de l'auteur.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2165.

(1910, p. 527.)

Soit ABCDEF *un hexagone inscrit ou circonscrit à une conique; soient* L, M, N *les points de rencontre respectifs des couples de côtés* CD, FA; BC, EF; AB, DE. *Démontrer la relation*

$$\frac{AL.DL}{FL.CL}\,\frac{BN.EN}{AN.DN}\,\frac{CM.FM}{BM.EM} = 1.$$

(Klug.)

SOLUTION

Par M. T. Ono (Kagoshima).

Soient L′, M′, N′ les points de rencontre respectifs des couples de droites AC, MN; CE, NL; AE, LM. Les trois triangles AFE, EDC, CBA sont coupés respectivement par les transversales LM, NL, MN. On a donc

$$(1)\qquad \frac{AL}{FL}\,\frac{FM}{EM}\,\frac{EN'}{AN'} = 1,$$

$$(2)\qquad \frac{DL}{CL}\,\frac{CM'}{EM'}\,\frac{EN}{DN} = 1,$$

$$(3)\qquad \frac{CM}{BM}\,\frac{BN}{AN}\,\frac{AL'}{CL'} = 1.$$

1° Dans le cas de l'hexagone inscrit, d'après le théorème de Pascal, les trois points L, M, N sont en ligne droite; ainsi donc L′, M′, N′ sont sur cette droite. Alors le triangle AEC étant coupé par la transversale L′M′N′, on a

$$(4)\qquad \frac{EN'}{AN'}\,\frac{AL'}{CL'}\,\frac{CM'}{EM'} = 1.$$

Ces relations (1), (2), (3), (4) donnent de suite, par multiplication, la relation indiquée en question.

2° Dans le cas de l'hexagone circonscrit, d'après le théorème de Brianchon, les droites AD, BE, CF se coupent en un point P; ainsi on a trois systèmes de triangles homologiques :

AFE, BCD; EDC, FAB; FED, ABC.

Donc les droites BD, BF, FD passent respectivement par les points N', M', L'; et aussi, les deux triangles AEC, DBF étant homologiques, ces points L', M', N' sont en ligne droite; on a donc de même la relation (4). Ainsi, on arrive au même résultat.

2168.

(1910, p. 528.)

m et p étant deux entiers quelconques et C_m^p désignant le nombre de combinaisons de m lettres p à p, on a

$$1^\circ \quad \frac{1}{p+m} - \frac{C_m^1}{m+p-1} + \frac{C_m^2}{m+p-2} - \ldots + (-1)^m \frac{C_m^m}{p} = (-1)^m \frac{1}{p} \frac{1}{C_{m+p}^p};$$

2° *Si* $m \geqq p$,

$$\frac{1}{p} - \frac{C_m^1}{p-1} + \frac{C_m^2}{p-2} - \ldots + (-1)^{p-1} \frac{C_m^{p-1}}{1}$$
$$= (-1)^{p-1} \left(\frac{1}{m-p+1} + \frac{1}{m-p+2} + \ldots + \frac{1}{m} \right) C_m^p.$$

(Letierce.)

SOLUTION

Par M. T. Ono (Kagoshima).

Au moyen de la méthode de décomposition d'une fraction en fractions simples ou bien en ayant recours à l'induction complète, on peut facilement vérifier l'identité suivante :

$$\frac{1}{x} - \frac{C_m^1}{x-1} + \frac{C_m^2}{x-2} - \ldots + (-1)^m \frac{C_m^m}{x-m}$$
$$= (-1)^m \frac{m!}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-m)}.$$

Alors, en posant $x = m+p$, on obtient l'identité 1°.

Nous allons de même appliquer la méthode d'induction

pour établir l'identité 2°. Supposons qu'on ait, pour quelque entier m,

$$(1)\quad \frac{1}{p} - \frac{C_m^1}{p-1} + \frac{C_m^2}{p-2} - \ldots + (-1)^{p-1}\frac{C_m^{p-2}}{1}$$
$$= (-1)^{p-1}\left(\frac{1}{m-p+1} + \frac{1}{m-p+2} + \ldots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m}\right)C_m^p;$$

on peut substituer $p-1$ au lieu de p, et l'on aura

$$(2)\quad \frac{1}{p-1} - \frac{C_m^1}{p-2} + \frac{C_m^2}{p-3} - \ldots + (-1)^{p-2}\frac{C_m^{p-2}}{1}$$
$$= (-1)^{p-2}\left(\frac{1}{m-p+2} + \frac{1}{m-p+3} + \ldots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m}\right)C_m^{p-1}.$$

En retranchant membre à membre et en remarquant qu'on a

$$C_m^p + C_m^{p-1} = C_{m+1}^p, \qquad \frac{C_m^p}{m-p+1} = \frac{1}{m+1}C_{m+1}^p,$$

on obtient

$$\frac{1}{p} - \frac{C_{m+1}^1}{p-1} + \frac{C_{m+1}^2}{p-2} - \ldots + (-1)^{p-1}\frac{C_{m+1}^{p-1}}{1}$$
$$= (-1)^{p-1}\left(\frac{1}{m-p+2} + \frac{1}{m-p+3} + \ldots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}\right)C_{m+1}^p.$$

Donc, etc.

2185.

(1912, p. 48.)

Les points de rencontre des génératrices perpendiculaires d'un paraboloïde hyperbolique sont sur une hyperbole; les plans de ces génératrices enveloppent un cône du second ordre dont les lignes focales sont perpendiculaires aux plans directeurs du paraboloïde.

(Klug).

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Soit M un point du paraboloïde par où passent deux génératrices MA et MB rectangulaires, soit MC la normale en M à la surface, le trièdre trirectangle MABC est circonscrit au paraboloïde, le point M appartient donc à l'hyperbole H, intersection de la surface avec son plan de Monge.

Quand M varie, le plan MAB enveloppe le cône circonscrit au paraboloïde le long de l'hyperbole H. Soient S le sommet de ce cône, SD une perpendiculaire à l'un des plans directeurs; un plan tangent au paraboloïde mené par SD coupe la surface suivant deux génératrices rectangulaires MA et MB, MA par exemple est perpendiculaire à SD, MB est parallèle à SD; or, si les plans directeurs ne sont pas rectangulaires, il ne peut y avoir sur la surface de génératrices parallèles à SD; dans le cas général MA et MB sont donc isotropes et SD est une focale du cône de sommet S et de base H.

Dans le cas où le paraboloïde considéré est équilatère, le plan de Monge devient le plan tangent au sommet de cette surface et le cône S se réduit à ce plan.

Autre solution par M. Parrod.

2186.

(1912, p. 48.)

Si l'on désigne par p un nombre premier et par P le nombre p^α, α pouvant être nul, le nombre

$$C_{P(p-1)}^{Pk} - (-1)^k$$

est multiple de p.

(G. F.)

SOLUTION

Par M. L. Grosschmid.

On voit tout d'abord que l'hypothèse, que p est un nombre premier impair ne constitue aucune restriction, car pour $p = 2$ les deux valeurs possibles de k (0 et 1) permettent une vérification directe.

La divisibilité de $C_{P(p-1)}^{P\,0} - (-1)^0$, comme celle de

$$C_{P(p-1)}^{P(p-1)} - (-1)^{p-1},$$

par p est évidente; on peut donc supposer $0 < k < p-1$. En remarquant qu'on a

$$(1) \qquad C_{P(p-1)}^{P.k} = \frac{[P(p-1)]!}{(Pk)!.[P(p-1) - Pk]!},$$

on voit aisément que, dans le second membre, p figure à la même puissance au numérateur qu'au dénominateur. C'est ce que l'on constate grâce à l'expression bien connue ([1])

$$h_{m!} = \sum_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{m}{p^i}\right),$$

qui donne l'exposant de la plus haute puissance de p divisant le produit $m! = 1.2.3\ldots m$. [On a désigné, suivant l'usage, par $E(x)$ le plus grand entier inférieur ou égal à x.]

En appliquant cette formule au numérateur $N = [P(p-1)]!$, on trouve

$$h_N = p^\alpha - 1 = P - 1,$$

et pour le dénominateur

$$h_D = k\frac{P-1}{p-1} + (p-1)\frac{P-1}{p-1} - k\frac{P-1}{p-1};$$

donc $h_N = h_D$. Les puissances les plus hautes de p qui divisent l'une le numérateur, l'autre le dénominateur de la fraction (1) étant les mêmes, ceci aura encore lieu pour la fraction.

$$(2) \qquad C_{P(p-1)}^{P.k} = \frac{P(p-1)\ldots[P(p-1) - Pk + 1]}{(P.k)!}.$$

Ainsi, en supprimant dans cette fraction (2) la plus haute

([1]) *Voir*, par exemple, Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie*, p. 27.

puissance de p, on arrive à la forme suivante

$$C_{P(p-1)}^{P.k} = \frac{r}{s},$$

où r et s sont premiers avec p.

Cela étant, on voit que la congruence

$$(3) \qquad r \equiv (-1)^k s \pmod{p}$$

est équivalente à la congruence proposée.

Vérifions cette congruence (3).

Soit $1 \leqq \beta \leqq \alpha - 1$; on aperçoit tout de suite que les facteurs du produit 1.2... Pk, qui sont divisibles par $p^{\beta+1}$, ont la forme

$$\lambda p^\alpha + a_1 p^{\alpha-1} + \ldots + a_{\alpha-\beta-1} p^{\beta+1} + a_{\alpha-\beta} p^\beta = f_\beta,$$

où

$$0 \leqq \lambda \leqq k-1; \quad 0 \leqq a_i \leqq p-1 \ (i = 1, 2, \ldots, \alpha - \beta); \quad \alpha - \beta \neq 0.$$

A tout facteur de cette espèce correspond un facteur du numérateur, à savoir

$$P(p-1) - f_\beta.$$

En divisant par p^β les facteurs qui se correspondent, on trouve

$$\lambda p^{\alpha-\beta} + a_1 p^{\alpha-\beta-1} + \ldots + a_{\alpha-\beta-1} p + a_{\alpha-\beta} = \frac{f_\beta}{p^\beta}$$

pour les uns et

$$\frac{P}{p^\beta}(p-1) - \frac{f_\beta}{p^\beta} = p^{\alpha-\beta}(p-1) - \frac{f_\beta}{p^\beta} \qquad (\alpha - \beta \geqq 1)$$

pour les autres.

D'autre part, il est clair que les seuls facteurs des produits considérés, qui contiennent p^α, sont

$$1p^\alpha, \quad 2p^\alpha, \quad \ldots, \quad (k-1)p^\alpha, \quad kp^\alpha$$

pour le dénominateur et

$$P(p-1), \quad P(p-1) - 1p^\alpha, \quad \ldots, \quad P(p-1) - (k-1)p^\alpha$$

pour le numérateur.

Ces termes donnent après division par p^α :

$$1,\quad 2,\quad \ldots,\quad k-1,\quad k$$

et

$$p-1,\quad p-2,\quad \ldots,\quad p-(k-1),\quad p-k.$$

Ces préliminaires établis, on est conduit à l'égalité

$$r=(p-1)(p-2)\ldots(p-k)\,\mathrm{A}\,\Pi\left[p^{\alpha-\beta}(p-1)-\frac{f_\beta}{p^\beta}\right],$$

où A désigne le produit de ceux des facteurs de r, qui sont de la forme $\mathrm{P}(p-1)-\rho$, où ρ est premier avec p.

Pour la même raison on trouve

$$s=k!\,\mathrm{B}\,\Pi\frac{f_\beta}{p^\beta},$$

où B signifie le produit des ρ, qui figurent dans A.

Enfin, si nous tenons compte de ce que $p^\alpha-1$ est pair et que le nombre total des facteurs, qui se trouvent dans r, est $p^\alpha k$, les raisonnements précédents montrent qu'on a

$$r\equiv(-1)^k k!\,(-1)^{(p^\alpha-1)k}\,\Pi\rho\,\Pi\frac{f^\beta}{p^\beta}\equiv(-1)^k s \qquad (\mathrm{mod}\ p).$$

C. Q. F. D.

Autres solutions par MM. E.-A. Egervary, T. Ono.

2187.

(1912, p. 48.)

La somme des produits qu'on obtient en multipliant trois à trois les entiers inférieurs à n est

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\times\frac{n(n-1)}{2}.$$

(G. F.)

Solution.

Par M. R. Bouvaist.

On connaît la formule

$$(a+b+c+\ldots+l)^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6\Sigma abc;$$

si, d'autre part, a, b, c, ..., l sont les entiers consécutifs

$1, 2, \ldots, n-1,$

$$(a+b+\ldots+l)^3 = \frac{n^3(n-1)^3}{8}, \qquad \Sigma a^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4},$$

$$\Sigma a^2 b = \Sigma a^2\, \Sigma a - \Sigma a^3$$

$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \times \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)^2 n^2}{4},$$

d'où

$$\Sigma abc = \frac{1}{6}\,\frac{n^2(n-1)^2}{4}\left[\frac{n(n-1)}{2} - 2n + 3\right]$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{n^2(n-1)}{4} \times \frac{n^2 - 5n + 6}{2},$$

$$\Sigma abc = \frac{n(n-1)\,n-2)(n-3)}{24} \times \frac{n(n-1)}{2}.$$

Autres solutions par MM. Barisien, Lemaire, Parrod, G. Polya, T. Ono.

2188.

(1912, p. 96.)

Si les côtés d'un angle droit sont tangents à deux coniques homofocales, la droite qui joint les points de contact enveloppe une conique homofocale aux deux premières.

(Klug.)

SOLUTION

Par M. J. Lemaire.

Cet énoncé est un simple cas particulier de la proposition corrélative de la question 2190.

Autres solutions par MM. Barisien, Bouvaist, Egan, T. Ono.

2189.

(1912, p. 96.)

Si par les extrémités d'un diamètre d'un cercle on mène deux tangentes non parallèles à une conique concentrique au cercle, la droite qui joint les points de contact enveloppe une conique homofocale à la première.

(Klug.)

SOLUTION

Par M. J. Lemaire.

Supposons que la conique donnée soit une ellipse de centre O, et soient A et A' deux points symétriques par rapport à O, tels

que $OA = OA' = r$; menons de ces points deux tangentes non parallèles qui se coupent en T, et qui touchent l'ellipse en B et B' : la droite OT passant aux milieux de AA' et de BB', ces deux dernières droites sont parallèles.

Ceci posé, soient F et F' les foyers, C et C' leurs projections sur la tangente AB, D et D' leurs projections sur la droite BB'; joignons OC, FB, F'B; OC est parallèle à F'B; posons

$$\alpha = \widehat{FBC} = \widehat{F'BC'} = \widehat{OCC'},$$

$$\beta = \widehat{OAB} = \widehat{B'BT}.$$

La figure donne

$$FC.F'C' = FB.F'B' \sin^2\alpha,$$

d'où

$$FB.F'B' = \frac{b^2}{\sin^2\alpha},$$

b désignant le demi-petit axe de l'ellipse.

D'ailleurs

$$\begin{aligned} FD.F'D' &= FB.F'B' \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) \\ &= \frac{b^2}{\sin^2\alpha}(\sin^2\alpha - \sin^2\beta) \\ &= b^2 - b^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}. \end{aligned}$$

Mais le triangle OCA donne, a désignant le demi-axe focal de l'ellipse,

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{OC}{OA} = \frac{a}{r}.$$

Donc

$$FD.F'D' = b^2 - b^2\frac{a^2}{r^2}.$$

L'enveloppe de BB' est par conséqnent une conique de foyers F et F'.

Nous avons supposé $r > a$, d'où $\alpha > \beta$, BB' laisse les foyers d'un même côté, l'enveloppe est une ellipse.

Si $r < a$, BB' passe entre F et F', on a alors

$$FD.F'D' = \frac{b^2}{r^2}(a^2 - r^2);$$

l'enveloppe est une hyperbole.

Dans le cas particulier où $r = a$, l'enveloppe se réduit aux deux foyers.

Autres solutions par MM. BARISIEN, BOUVAIST, EGAN, T. ONO.

2190.

(1912, p. 96.)

Étant données deux coniques dans un même plan, on leur mène des tangentes aux points où elles sont rencontrées par une droite quelconque. Les sommets du quadrilatère ainsi formé, qui ne sont pas les points de rencontre de tangentes à une même conique, sont sur une conique appartenant au faisceau ponctuel déterminé par les deux coniques proposées. (THIÉ.)

SOLUTION

Par M. T. ONO (Kagoshima).

Soient $S = 0$, $S_1 = 0$ deux coniques et $P = 0$ une droite. Si l'on désigne par (x', y'), (x'', y'') les pôles de cette droite par rapport aux deux coniques, on aura les équations des deux systèmes des tangentes

$$SS' - P^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad S_1 S''_1 - P^2 = 0,$$

où S' et S''_1 sont les puissances respectives de (x', y'), (x'', y'') par rapport à S, S_1. Donc les points d'intersection de ces tangentes sont sur une conique représentée par l'équation

$$SS' - S_1 S''_1 = 0.$$

Autres solutions par MM. BOUVAIST, EGAN, KLUG, J. LEMAIRE.

M. LEMAIRE ajoute la remarque suivante : *Corrélativement, si d'un point on mène des tangentes à deux coniques, les quatre droites obtenues en joignant leurs points de contact, autres que celles qui joignent les points de contact appartenant à une même conique, sont tangentes à une conique du faisceau tangentiel déterminé par les deux coniques proposées.*

M. KLUG fait observer que l'énoncé de la question 2190 se trouve dans le *Traité des sections coniques* de Chasles (p. 279), où il apparaît comme conséquence d'un théorème plus général.

2191.

(1912, p. 144.)

On considère un rectangle ABCD *variable, circonscrit à une ellipse dont l'un des foyers est* F.

Le centre du cercle circonscrit au triangle FAB, *son orthocentre et le centre de son cercle des neuf points ont pour lieux des cercles.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Soient A et B les intersections d'une tangente à une ellipse de centre O et de foyers F et F' avec le cercle de Monge de cette courbe, soient φ et φ' les projections de F et F' sur AB. Soit H l'orthocentre de FAB, on a visiblement

$$\varphi A . \varphi B = a^2 + b^2 - \overline{O\varphi}^2 = b^2 = \varphi F . \varphi H = F\varphi . F'\varphi',$$

d'où

$$F'\varphi' = H\varphi;$$

la droite F'H est donc perpendiculaire sur Fφ et le lieu de H est le cercle de diamètre FF'.

Soit K le point diamétralement opposé à F sur le cercle FAB, ce point est sur F'φ' puisque Aφ = φ'B; d'autre part,

$$K\varphi' = \varphi H = \varphi' F'.$$

K est donc le symétrique de F' par rapport à AB; si a est le demi-grand axe de l'ellipse, FK = $2a$; le rayon du cercle FAB est donc constant et le lieu du centre de ce cercle est le cercle de centre F et de rayon a.

L'axe radical du cercle de diamètre FF' et du cercle FAB est la parallèle à AB menée par F; cette droite coupe le cercle FF' et par suite le cercle FAB au point H' diamétralement opposé à H sur le cercle FF', le cercle des neuf points de FAB passe par suite par le milieu O de HH', et, comme son rayon est constant et égal à $\frac{a}{2}$, son centre décrit le cercle de centre O et de rayon $\frac{a}{2}$.

Autres solutions par MM. Klug, Sicard, T. Ono.

[C2c]

SUR L'INTÉGRALE $\int_{M_0}^{M} \frac{dx}{\varepsilon\sqrt{ax^2+2bx+c}}$.

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. Soit (*fig.* 1) la conique représentée avec des axes rectangulaires par l'équation

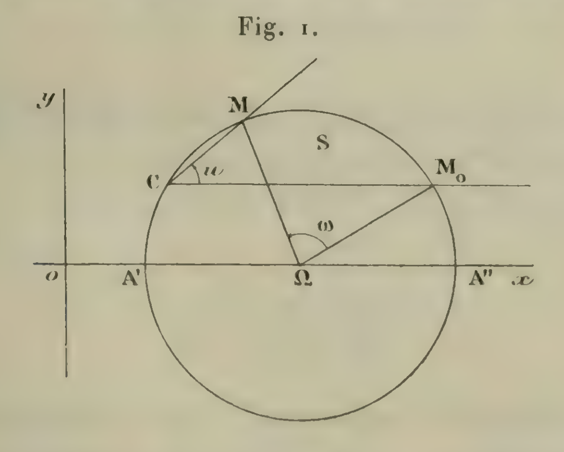
$$y^2 = ax^2 + 2bx + c;$$

nous voulons considérer l'intégrale

$$I = \int_{M_0}^{M} \frac{dx}{y},$$

le point (x, y) se déplaçant sur la courbe, de M_0 en M,

Fig. 1.



dans un sens déterminé lorsque la courbe est une ellipse, sans passer d'une branche à l'autre lorsque la courbe est une hyperbole ; on peut écrire

$$I = \int_{M_0}^{M} \frac{dx}{\varepsilon\sqrt{ax^2+2bx+c}},$$

ε étant le signe de y qui peut varier entre les limites de l'intégration lorsque le trinome a des racines ([1]).

2. *Cette intégrale représente, à un facteur constant près, le double de l'aire du secteur* (ΩM_0, ΩM), Ω *étant le centre de la conique;* dans le cas de l'ellipse, il s'agit, bien entendu, de l'aire balayée par un rayon vecteur qui va de la position ΩM_0 à la position ΩM en suivant le mouvement du point (x, y). On a en effet pour cette aire, l'abscisse du centre Ω étant $\frac{-b}{a}$,

$$\begin{aligned} 2S &= \int_{M_0}^{M}\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)dy - y\,dx\right] \\ &= \frac{1}{a}\int_{M_0}^{M}[(ax+b)\;dy - ay\,dx]; \end{aligned}$$

en multipliant et en divisant par y sous le signe $\int$, et en remplaçant $y\,dy$ par $(ax+b)\,dx$, y^2 par

$$ax^2 + 2bx + c,$$

on a

$$\begin{aligned} 2S &= \frac{1}{a}\int_{M_0}^{M}\left[\frac{(ax+b)^2 - a(ax^2+bx+c)}{y}\right]dx \\ &= -\frac{ac-b^2}{a}\int_{M_0}^{M}\frac{dx}{y} \end{aligned}$$

ou

$$\frac{2S}{M} = -\int_{M_0}^{M}\frac{dx}{y},$$

M représentant le carré $\pm B^2$ de la moitié de l'axe perpendiculaire à $x'x$. Dans les conditions de la figure 1, par exemple, l'élément $\frac{dx}{y}$ de l'intégrale est

---

([1]) On sait que l'intégration d'une fonction rationnelle de la variable x et du radical $\sqrt{ax^2+2bx+c}$ se ramène au calcul de l'intégrale considérée ici.

négatif, l'intégrale a une valeur négative, $\frac{2S}{M}$ est positif, S est positif.

Si le trinome a des racines x', x'', c'est-à-dire si l'axe $x'x$ est transverse, la fonction $\frac{1}{\sqrt{a(x-x')(x-x'')}}$ est un infiniment grand lorsque le point (x, y) traverse l'axe $x'x$; l'intégrale reste finie, parce que cet infiniment grand est d'ordre $\frac{1}{2}$ par rapport à $\frac{1}{x-x'}$, et l'on peut le voir encore en prenant y comme variable indépendante :

$$I = \int \frac{dx}{y} = \int \frac{dy}{yy'} = 2\int \frac{dy}{(y^2)'} = \int \frac{dy}{ax+b};$$

d'ailleurs l'aire S reste finie. Ce fait prend plus de relief sous la forme suivante : si l'on considère la courbe qui a pour équation

$$Y = \frac{M}{y} = \frac{M}{\varepsilon\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

(le lecteur est prié de faire la figure en partant de la figure 1), on a pour l'aire A comprise entre l'axe des x, la courbe, une ordonnée fixe P_0N_0 et une ordonnée variable PN_1,

$$A = \int Y\,dx = M\int \frac{dx}{y} = -2s,$$

ou

$$\text{aire}(P_0N_0, PN) = -2 \times \text{secteur}(\Omega M_0, \Omega M),$$

les points N_0 et N étant ceux qui correspondent aux points M_0 et M ; si P_0 est l'un des deux points A', A'', où la courbe primitive rencontre $x'x$, à supposer qu'il y ait rencontre, l'ordonnée correspondante Y est infinie, mais l'aire A reste finie.

Je rappellerai à ce propos la formule

$$\int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\sqrt{-(x-x')(x-x'')}} = \pi \qquad (x' < x''),$$

sur laquelle nous reviendrons; la conique est ici un cercle, comme on l'a supposé pour faire la figure, et comme on intègre de x' à x'', avec $y > 0$, on a bien

$$2\,S = -\pi R^2;$$

on va en effet de $\Omega A'$ à $\Omega A''$ dans le sens contraire au sens direct (Ox, Oy). Un changement de variable ramène d'ailleurs cette formule à celle-ci, qui en est un cas particulier,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

L'interprétation géométrique de l'intégrale I *qui vient d'être donnée permettra de se rendre compte des diverses formes que peut recevoir l'expression de cette intégrale, du moins dans l'hypothèse $a < 0$, c'est-à-dire lorsque la courbe est une ellipse, et permettrait même de les écrire* a priori; l'aire du secteur de cercle $(a = -1)$ se mesure en effet très simplement, et l'on a par projection l'aire du secteur elliptique.

3. Avant de calculer l'intégrale I, je rappelle les formules suivantes :

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x,$$

$$\int \frac{dx}{l^2+x^2} = \frac{1}{l} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{l},$$

et

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \quad \operatorname{arg\,th} x = \frac{1}{2} \operatorname{L} \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1),$$
$$\int \frac{dx}{l^2-x^2} = \frac{1}{l} \operatorname{arg\,th} \frac{x}{l} = \frac{1}{2l} \operatorname{L} \frac{l+x}{l-x} \quad (-l < x < l);$$
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \quad \operatorname{arg\,coth} x = \frac{1}{2} \operatorname{L} \frac{x+1}{x-1} \quad (x < -1 \text{ ou } x > 1),$$
$$\int \frac{dx}{l^2-x^2} = \frac{1}{l} \operatorname{arg\,coth} \frac{x}{l} = \frac{1}{2l} \operatorname{L} \frac{x+l}{x-l} \quad (x < -l \text{ ou } x > l);$$

on peut écrire dans tous les cas

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{L} \left| \frac{1+x}{1-x} \right|,$$
$$\int \frac{dx}{l^2-x^2} = \frac{1}{2l} \operatorname{L} \left| \frac{l+x}{l-x} \right|,$$

la variable x restant bien entendu dans l'un des trois domaines $(-\infty, -1)$, $(-1, +1)$, $(+1, +\infty)$.

4. Cela posé, la courbe étant unicursale, on peut exprimer x et y en fonction rationnelle du coefficient angulaire t de la droite CM, C étant sur la courbe un point fixe de coordonnées α et β, M étant le point de coordonnées x et y; cela permettra, soit dit en passant, de faire franchir au point M l'axe $x'x$ sans renverser le sens de variation de la variable. Nous supposerons d'ailleurs que le point M_0 est déterminé d'après le point C en menant CM_0 parallèle à $x'x$, de sorte que l'intégrale I sera nulle par $t = 0$; la valeur de t est infinie lorsque le point M est diamétralement opposé au point M_0. Soit donc

$$\beta = \pm\sqrt{a\alpha^2 + 2b\alpha + c};$$

or, posons

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha} = t.$$

On a, en retranchant de l'expression de y^2 en x celle

de β^2 en α,

$$y^2 - \beta^2 = a(x^2 - \alpha^2) + 2b(x - \alpha),$$

ou, en divisant par $x - \alpha$ et en introduisant t,

$$(y + \beta)t = a(x + \alpha) + 2b,$$

ou, en remplaçant y par son expression générale en x et t, qui est $\beta + (x - \alpha)t$,

$$2\beta t + (x - \alpha)t^2 = a(x + a) + 2b,$$

et, *en différentiant sous cette forme*,

$$2[\beta + (x - \alpha)t]\,dt = (a - t^2)\,dx,$$
$$2y\,dt = (a - t^2)\,dx;$$

on a par suite

$$I = \int_{M_0}^{M} \frac{dx}{y} = 2\int_{M_0}^{M} \frac{dt}{a - t^2}.$$

II.

5. Soit d'abord

$$\boxed{a < 0},$$

auquel cas la conique considérée est une ellipse ; le trinome $ax^2 + 2bx + c$ doit avoir des racines, et les limites d'intégration (en x) doivent être comprises entre les racines. On a alors

$$I = -2\int_{M_0}^{M} \frac{dt}{(-a) + t^2},$$

ou

$$I = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \times 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{\sqrt{-a}} \qquad \left(\frac{y - \beta}{x - \alpha} = t\right),$$

la notation *arc tang* désignant un arc compris entre O et π, ou entre O et $-\pi$, selon que le point variable est supposé avoir été de M_0 en M en se déplaçant dans le sens direct ou en se déplaçant dans le sens rétrograde; l'intégrale a une valeur nulle pour $t = 0$.

Lorsque c est positif, on peut faire $\alpha = 0$, $\beta = +\sqrt{c}$, le point C étant ainsi l'un des deux points où la courbe est coupée par l'axe des y; on a alors, avec un indice destiné à rappeler la limite inférieure de l'intégration $\left(y_0 = \sqrt{c},\ x_0 = \frac{-2b}{a}\right)$,

$$I_0 = \frac{-1}{\sqrt{-a}}\, 2 \text{ arc tang } \frac{y - \sqrt{c}}{x\sqrt{-a}}.$$

On se rend aisément compte de la formule générale ci-dessus en considérant le cas où, a étant égal à -1, la conique est un cercle (*fig.* 1); on peut écrire alors

$$y^2 = -x^2 + 2hx + k.$$

La formule

$$\frac{2S}{R^2} = -I = 2\int_{M_0}^{M} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \text{ arc tang} t,$$

si l'on tient compte du théorème de l'angle inscrit, exprime en effet un résultat élémentaire : si l'on désigne par u l'angle, compris entre O et π ou entre O et $-\pi$ selon le sens de circulation du point (x, y), dont il faut faire tourner $x'x$ pour l'amener sur CM ou sur son prolongement, et par ω l'angle $(\Omega M_0, \Omega M)$ qui est double du précédent, et qui est par suite compris entre O et 2π ou entre O et -2π selon les circonstances, cette formule donne

$$\frac{2S}{R^2} = 2u = \omega \qquad \text{ou} \qquad S = \frac{1}{2} R^2 \omega.$$

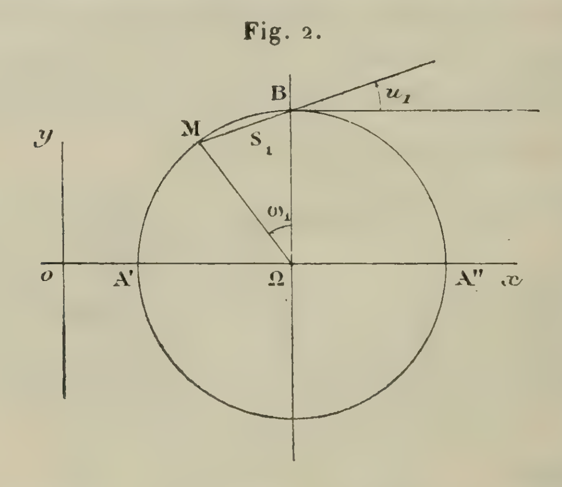
6. Le point C peut être un sommet de la courbe.

Si l'on prend d'abord comme point C un sommet B sur l'axe perpendiculaire à $x'x$ (*fig.* 2), on fera par exemple $\alpha = \frac{-b}{a}$, $\beta = +\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{\sqrt{-a}}$, et l'on aura

$$(1) \qquad I_1 = \frac{-1}{\sqrt{-a}}\, 2 \text{ arc tang } \frac{-y\sqrt{-a} + \sqrt{b^2 - ac}}{ax + b};$$

l'aire S, qui est de signe contraire à I dans le cas de

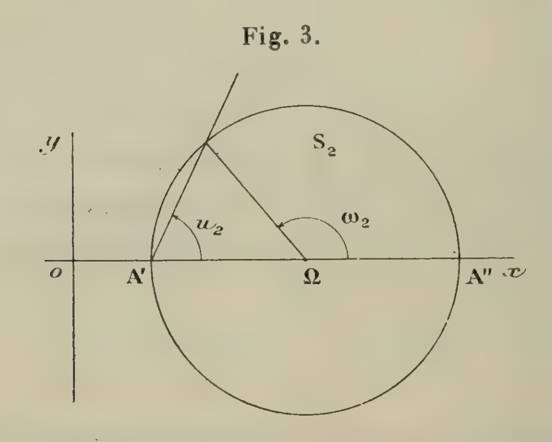
Fig. 2.



l'ellipse, est alors comptée à partir du rayon vecteur Ω B.

Si l'on prend comme point C un sommet A' sur l'axe des x (*fig.* 3), on fera $\alpha = x'$, $\beta = 0$, x' étant l'une

Fig. 3.



quelconque des deux racines du trinome, et l'on aura

$$I_2 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{\varepsilon\sqrt{-a}\sqrt{-(x-x')(x-x'')}}{(x-x')\sqrt{-a}},$$

ε étant toujours le signe de y; *le signe de la différence $x'' - x'$ étant désigné par* ε', comme la diffé-

rence $x - x'$ a aussi le signe ε', on a

$$(2) \qquad \mathrm{I}_2 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} 2 \operatorname{arc\,tang} \varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{x - x''}{x - x'}};$$

l'aire S est alors comptée à partir du rayon vecteur $\Omega A''$. (La vérification géométrique de cette formule est aisée.)

Pour $a = -1$, et en intégrant de x'' à x', avec $x' < x''$, et $\varepsilon = +$, on a

$$\mathrm{I}_2 = -\pi,$$

ce qui donnerait d'ailleurs

$$2\mathrm{S} = \pi \mathrm{R}^2;$$

en renversant les limites de l'intégration, on a la formule donnée à la fin du n° 2.

D'après la définition de ε', on a

$$x' = \frac{-b + \varepsilon' \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

7. On obtient directement des formules équivalentes aux formules (1) et (2) en partant des formules

$$\int_0^x \frac{dx}{\eta \sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x, \qquad \int_1^x \frac{dx}{\eta \sqrt{1 - x^2}} = \arccos x;$$

η représente ± 1, et change quand le radical s'annule.

Pour la première intégrale, nous supposerons que l'on part avec $\eta = +$. L'arc sinus est compris entre O et 2π si x varie de manière à prendre les valeurs successives $0, +1, 0, -1, 0$, entre O et -2π dans le cas contraire, et le cosinus de cet arc a le signe η.

Pour la seconde intégrale, la dérivée du cosinus étant le sinus changé de signe, lorsque x varie de $+1$ à -1, puis de -1, à $+1$, l'arc cosinus est compris entre O

et 2π si l'on part avec $\eta = -$, entre O et -2π dans le cas contraire, et le sinus de cet arc a le signe $-\eta$.

Soit alors

$$I = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \int \frac{a\,dx}{\varepsilon\sqrt{b^2 - ac - (ax+b)^2}}.$$

Si l'on écrit d'abord, en vue de l'intégrale (1) qui correspond à la figure (2),

$$I_1 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \int_0 \frac{d\dfrac{(ax+b)}{\sqrt{b^2 - ac}}}{\varepsilon\sqrt{1 - \dfrac{(ax+b)^2}{b^2 - ac}}},$$

l'indice o correspondant à l'hypothèse $ax + b = 0$ et le signe ε étant le signe $+$ au départ ($\beta > 0$), on a

$$(3) \qquad I_1 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \times \arcsin \frac{ax+b}{\sqrt{b^2 - ac}},$$

le cosinus de l'arc sinus ayant le signe ε, *c'est-à-dire le signe de* y, et cet arc étant par exemple compris entre O et 2π si $\dfrac{ax+b}{\sqrt{b^2 ac}}$ est d'abord positif, c'est-à-dire si $x + \dfrac{b}{a}$ est d'abord négatif : l'intégrale I_1 est alors négative, l'aire S_1 est positive.

Si l'on écrit, en vue de l'intégrale (2) qui correspond à la figure (3),

$$I_2 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \int_1 \frac{d\dfrac{ax+b}{-\varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}}}{-\varepsilon\varepsilon'\sqrt{1 - \dfrac{(ax+b)^2}{b^2 - ac}}},$$

ε' étant toujours le signe de la différence $x'' - x'$ et l'indice 1 correspondant à l'hypothèse

$$\frac{ax+b}{-\varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}} = 1 \qquad (\text{ou } x = x''),$$

on a

$$(4) \qquad I_2 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,cos} \frac{ax+b}{-\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}},$$

le sinus de l'arc cosinus ayant le signe $\varepsilon\varepsilon'$, *c'est-à-dire le signe de* $\varepsilon' y$, et cet arc étant par exemple compris entre O et 2π si l'on part avec $\varepsilon\varepsilon' = +$, c'est-à-dire avec $\varepsilon = +$ pour $x' < x''$, avec $\varepsilon = -$ pour $x' > x''$: l'intégrale I_2 est alors négative, l'aire S_2 est positive.

8. On a, avec la formule (3),

$$\operatorname{arc\,sin} \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}} = \operatorname{arc\,cos} \frac{y\sqrt{-a}}{\sqrt{b^2-ac}} = \operatorname{arc\,tang} \frac{ax+b}{y\sqrt{-a}};$$

cet arc est nul si l'on a

$$x = \frac{-b}{a}, \qquad y\sqrt{-a} = \sqrt{b^2-ac},$$

c'est-à-dire au point B; l'intégrale (3) est bien identique à l'intégrale (1). La formule

$$(5) \qquad I_1 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,cos} \frac{y\sqrt{-a}}{\sqrt{b^2-ac}}.$$

est intéressante.

On a de même avec la formule (4),

$$\operatorname{arc\,cos} \frac{ax+b}{-\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}} = \operatorname{arc\,sin} \frac{y\sqrt{-a}}{\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}}$$
$$= \operatorname{arc\,tang} \frac{-y\sqrt{-a}}{ax+b};$$

cet arc est nul si l'on a

$$y = 0, \qquad ax+b = -\varepsilon'\sqrt{b^2-ac} \qquad \text{ou} \qquad x = x'',$$

c'est-à-dire au point A''; l'intégrale (4) est bien iden-

tique à l'intégrale (2). La formule

$$(6) \qquad I_2 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{y\sqrt{-a}}{\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}}$$

est intéressante.

On peut d'ailleurs déduire (1) de (3). Si l'on pose, en ayant soin de considérer deux lignes trigonométriques pour l'arc de la formule (3),

$$2 \operatorname{arc tang} X \quad \text{ou} \quad \operatorname{arc tang} \frac{2X}{1-X^2} = \operatorname{arc tang} \frac{ax+b}{y\sqrt{-a}},$$

et

$$2 \operatorname{arc tang} X \quad \text{ou} \quad \arcsin \frac{2X}{1+X^2} = \arcsin \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}},$$

on obtient la valeur unique

$$X = \frac{-y\sqrt{-a}+\sqrt{b^2-ac}}{ax+b},$$

ce qui donne bien la formule (1); on peut encore employer le cosinus.

On déduirait de même (2) de (4), mais il vaut mieux faire l'inverse en écrivant

$$2 \operatorname{arc tang} \varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{x-x''}{x-x'}} = \operatorname{arc tang} \ldots = \arcsin \ldots = \arccos \ldots.$$

Voici d'autres vérifications. Si ω_1 et ω_2 sont les arcs des formules (3) et (4), on a

$$\sin(-\omega_1) = \varepsilon' \cos\omega_2, \quad \cos(-\omega_1) = \varepsilon' \sin\omega_2, \quad \omega_2 - \omega_1 = \varepsilon' \frac{\pi}{2}.$$

Si u est l'arc de la formule générale du n° 5, on a

$$\operatorname{arc tang} \frac{y-\beta}{(x-\alpha)\sqrt{-a}} = u,$$

$$\arcsin \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}} = \arccos \frac{y\sqrt{-a}}{\sqrt{b^2-ac}} = \omega_1;$$

ω'_1 étant la valeur de ω_1 qui correspond à $x=\alpha$, $y=\beta$,

cela donne

$$\operatorname{tang} u = \frac{\cos\omega_1 - \cos\omega'_1}{\sin\omega'_1 - \sin\omega_1} = \operatorname{tang}\frac{\omega'_1 + \omega_1}{2},$$

et par suite

$$2u - \omega_1 = \text{const.}$$

Observons que les figures 2 et 3, pour lesquelles on suppose $a = -1$, donnent directement les formules (3) et (4). L'équation du cercle étant

$$y^2 = -x^2 + 2hx + k,$$

de manière que l'abscisse du centre est h, on a

$$\frac{2S_1}{R^2} = \arcsin\frac{h - x}{\sqrt{h^2 + k}},$$

le cosinus ayant le signe de y, ...; on a également, avec $x' < x''$,

$$\frac{2S_2}{R^2} = \arccos\frac{x - h}{\sqrt{h^2 + k}},$$

le sinus ayant le signe de y, ...

III.

9. Soit maintenant

$$\boxed{a > 0},$$

auquel cas la conique considérée est une hyperbole; nous désignerons cette hyperbole par (H_1) ou par (H_2), selon que les sommets réels sont B′ et B sur l'axe perpendiculaire à $x'x$, ou A′ et A″ sur l'axe $x'x$ (*fig.* 4 et 5). On a alors

$$I = 2\int\frac{dt}{a - t^2},$$

et il faut distinguer deux cas selon qu'on a $t^2 < a$ ou $t^2 > a$. Comme les asymptotes de la courbe ont

pour coefficients angulaires $\pm\sqrt{a}$, on a ceci :

$b^2 - ac < 0$ (H_1)	M sur la branche *qui contient* C,	$t^2 < a$,
	M sur la branche qui ne contient pas C,	$t^2 > a$;
$b^2 - ac > 0$ (H_2)	M sur la branche *qui ne contient pas* C,	$t^2 < a$,
	M sur la branche qui contient C,	$t^2 > a$.

Selon qu'on a $t^2 < a$, comme dans les figures 4 et 5, ou $t^2 > a$, on a

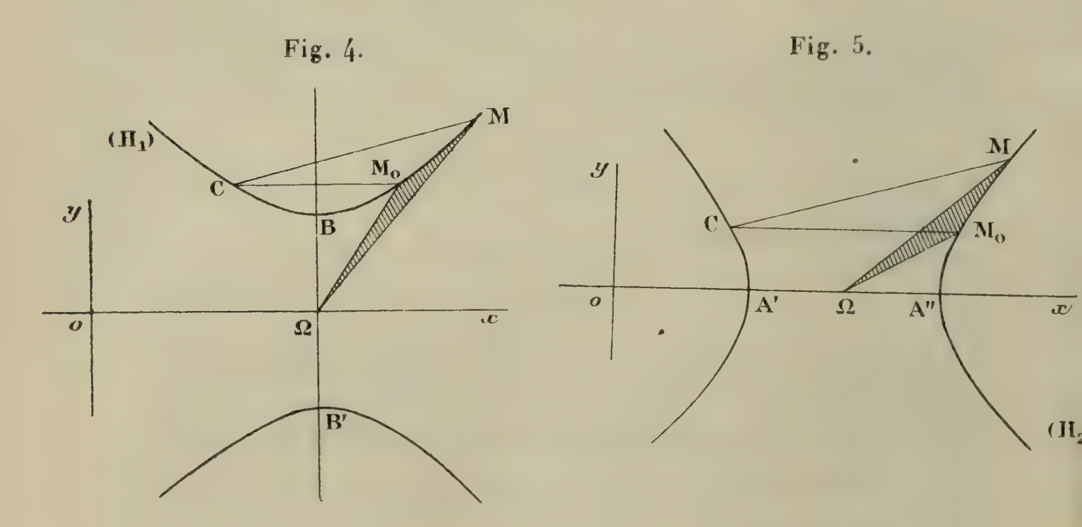
$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg \mathrm{th} \frac{t}{\sqrt{a}}$$

ou $$\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha} = t\right),$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg \mathrm{coth} \frac{t}{\sqrt{a}}$$

la première intégrale étant nulle pour $t = 0$, *ce qui correspond à* CM_0 *parallèle à* $x'x$, la seconde inté-

Fig. 4. Fig. 5.



grale étant nulle pour t infini, ce qui correspond à CM_0 parallèle à $y'y$ (il y a ici une dérogation à la convention faite au n° 4 sur la position du point M_0 mais cette seconde intégrale ne sera pas maintenue) ; on peut

écrire d'une manière générale

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{L}\left|\frac{1+\dfrac{t}{\sqrt{a}}}{1-\dfrac{t}{\sqrt{a}}}\right|.$$

Lorsque c est positif, on peut faire $\alpha = 0$, $\beta = +\sqrt{c}$; on a alors, selon les cas.

$$\mathrm{I}_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \arg\mathrm{th}\,\frac{y-\sqrt{c}}{x\sqrt{a}},$$

ou

$$\mathrm{I}_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2\arg\mathrm{coth}\,\frac{y-\sqrt{c}}{x\sqrt{a}}.$$

10. Prenons comme point C un sommet de la courbe.

Dans l'hypothèse $b^2 - ac < 0$, l'axe transverse est l'axe perpendiculaire à $x'x$; en faisant, par exemple, $\alpha = \frac{-b}{a}$, $\beta = \frac{+\sqrt{ac-b^2}}{\sqrt{a}}$, on a

$$(1') \qquad \mathrm{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2\arg\mathrm{th}\,\frac{y\sqrt{a}-\sqrt{ac-b^2}}{ax+b},$$

ou

$$(1'') \qquad \mathrm{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2\arg\mathrm{coth}\,\frac{y\sqrt{a}-\sqrt{ac-b^2}}{ax+b},$$

selon que y est positif ou négatif; l'aire S est alors comptée à partir du rayon vecteur ΩB pour la formule $(1')$, à partir de ΩB$'$ pour la formule $(1'')$. D'ailleurs on peut écrire, avec $y < 0$,

$$(1'') \qquad \mathrm{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2\arg\mathrm{th}\,\frac{y\sqrt{a}+\sqrt{ac-b^2}}{ax+b},$$

ce qui revient à faire dans ce cas $p = -\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\sqrt{a}}$. Nous ferons dès lors $\beta = \frac{\varepsilon\sqrt{ac-b^2}}{\sqrt{a}}$, c'est-à-dire que *nous*

prendrons toujours comme point C *le sommet,* B *ou* B′, *située sur la branche de l'hyperbole* (H_1) *qui contient les points* M ; nous aurons ainsi

$$(1', 1'') \qquad I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \operatorname{arg\,th} \frac{y\sqrt{a} - \varepsilon\sqrt{ac - b^2}}{ax + b},$$

l'aire S étant comptée à partir du demi-axe, ΩB ou ΩB′, qui atteint la branche décrite par le point M.

Dans l'hypothèse $b^2 - ac > 0$, l'axe transverse est dirigé suivant $x'x$; en faisant $\alpha = x'$, $\beta = 0$, on a

$$\frac{t}{\sqrt{a}} = \frac{\varepsilon\sqrt{(x - x')(x - x'')}}{x - x'} = \varepsilon\varepsilon'\sqrt{\frac{x - x''}{x - x'}},$$

et, par suite,

$$(2') \qquad I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \operatorname{arg\,th} \varepsilon\varepsilon'\sqrt{\frac{x - x''}{x - x'}},$$

ou

$$(2'') \qquad I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \operatorname{arg\,coth} \varepsilon\varepsilon'\sqrt{\frac{x - x''}{x - x'}},$$

ε' étant le signe de la différence $x - x'$, c'est-à-dire le signe de la différence $x'' - x'$ par la formule (2′), et le signe de la différence $x' - x''$ par la formule (2″) ; l'aire S est alors comptée à partir de ΩA″ pour la formule (2′), à partir de ΩA′ pour la formule (2″). D'ailleurs on peut écrire

$$(2'') \qquad I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \operatorname{arg\,th} \varepsilon\varepsilon'\sqrt{\frac{x - x'}{x - x''}},$$

ce qui revient à faire dans ce cas $\alpha = x''$. *Nous prendrons dès lors comme point* C *le sommet situé sur la branche de l'hyperbole* H_2 *qui ne contient pas les points* M, sommet que nous désignerons par A′ ; nous

écrirons donc, a étant positif,

$$x' = \frac{-b - \varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

et nous emploierons la formule (2′).

11. Si l'on remplace l'argument hyperbolique par un logarithme, d'après la formule

$$2 \arg \operatorname{th} x = \mathrm{L}\frac{1+x}{1-x},$$

la formule (1′, 1″), relative à l'hypothèse $b^2 - ac < 0$, est remplacée par celle-ci :

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \mathrm{L}\frac{ax + b + y\sqrt{a} - \varepsilon\sqrt{ac - b^2}}{ax + b - y\sqrt{a} + \varepsilon\sqrt{ac - b^2}}.$$

Or l'identité

$$(ax + b + y\sqrt{a})(ax + b - y\sqrt{a}) = b^2 - ac$$

donne

$$\frac{ax + b + y\sqrt{a}}{\varepsilon\sqrt{ac - b^2}} = \frac{-\varepsilon\sqrt{ac - b^2}}{ax + b - y\sqrt{a}}$$
$$= \frac{ax + b + y\sqrt{a} - \varepsilon\sqrt{ac - b^2}}{ax + b - y\sqrt{a} + \varepsilon\sqrt{ac - b^2}};$$

on peut donc écrire

[1′, 1″] $$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \mathrm{L}\frac{ax + b + y\sqrt{a}}{\varepsilon\sqrt{ac - b^2}}.$$

Pour la formule (2′) relative à l'hypothèse

$$b^2 - ac > 0,$$

on avait d'abord (en faisant $\alpha = x'$, $\beta = 0$)

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg \operatorname{th} \frac{y}{(x - x')\sqrt{a}};$$

cela donne

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg \operatorname{th} \frac{y\sqrt{a}}{ax + b + \varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \times \mathrm{L} \frac{ax + b + y\sqrt{a} + \varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}}{ax + b - y\sqrt{a} + \varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}};$$

mais l'identité ci-dessus donne

$$\frac{ax + b + y\sqrt{a}}{\varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}} = \frac{\varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}}{ax + b - y\sqrt{a}}$$

$$= \frac{ax + b + y\sqrt{a} + \varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}}{ax + b - y\sqrt{a} + \varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}};$$

on peut donc écrire

[2′] $$I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \mathrm{L} \frac{ax + b + y\sqrt{a}}{\varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}}.$$

12. On obtient directement des formules équivalentes aux formules (1′, 1″) et (2′), ou [1′, 1″] et [2′], en partant des formules

$$\int_0^x \frac{dx}{\eta\sqrt{x^2 + 1}} = \arg \operatorname{sh} \eta x = \mathrm{L}(\eta x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$\int_1^x \frac{dx}{\eta\sqrt{x^2 - 1}} = \arg \operatorname{ch} x = \mathrm{L}(x + \eta\sqrt{x^2 - 1}),$$

x étant positif par cette seconde intégrale, et le sinus hyperbolique de $\arg \operatorname{ch} x$ ayant le signe η.

Soit alors

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{a\,dx}{\varepsilon\sqrt{(ax + b)^2 + (ac - b^2)}}.$$

Si l'on écrit, dans l'hypothèse $b^2 - ac < 0$,

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0 \frac{d\,\dfrac{ax + b}{\sqrt{ac - b^2}}}{\varepsilon\sqrt{\dfrac{(ax + b)^2}{b^2 - ac} + 1}},$$

l'indice o correspondant à l'hypothèse $ax+b=0$, on a

(3′)
$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \arg \mathrm{sh} \frac{ax+b}{\varepsilon\sqrt{ac-b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \mathrm{L}\frac{ax+b+y\sqrt{a}}{\varepsilon\sqrt{ac-b^2}};$$

de même si l'on écrit, dans l'hypothèse $b^2-ac>0$,

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_1 \frac{d\dfrac{ax+b}{\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}}}{\varepsilon\varepsilon'\sqrt{\dfrac{(ax+b)^2}{b^2-ac}-1}},$$

ε' étant le signe de la différence $x''-x'$, ou le signe de $x-x'$, ou le signe de $x-\dfrac{-b}{a}$, ou enfin le signe de $ax+b$, et l'indice 1 correspondant à l'hypothèse

$$\frac{ax+b}{\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}} = 1 \qquad (\text{ou } x = x''),$$

on a

(4′)
$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \arg \mathrm{ch} \frac{ax+b}{\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \mathrm{L}\frac{ax+b+y\sqrt{a}}{\varepsilon'\sqrt{b^2-ac}},$$

le sinus hyperbolique de l'argument ayant le signe $\varepsilon\varepsilon'$ ou le signe de $\varepsilon' y$.

13. Les intégrales (3′) et (4′) sont identiques aux intégrales (1′, 1″) et (2′), comme le montre la forme logarithmique des unes et des autres, mais on peut vérifier cette identité indépendamment de cette forme.

On a, avec la formule (3′),

$$\arg \mathrm{sh} \frac{ax+b}{\varepsilon\sqrt{ac-b^2}} = \arg \mathrm{ch} \frac{y\sqrt{a}}{\varepsilon\sqrt{ac-b^2}} = \arg \mathrm{th} \frac{ax+b}{y\sqrt{a}};$$

cet argument est nul si l'on a

$$x = \frac{-b}{a}, \qquad y\sqrt{a} = \varepsilon\sqrt{ac - b^2},$$

c'est-à-dire au point B, ou au point B'; l'intégrale (3') est donc bien identique à l'intégrale (1', 1"). La formule

$$(5') \qquad I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \arg\text{ch}\, \frac{y\sqrt{a}}{\varepsilon\sqrt{ac - b^2}}$$

est intéressante.

On a de même, avec la formule (4'),

$$\arg\text{ch}\, \frac{ax+b}{\varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}} = \arg\text{sh}\, \frac{y\sqrt{a}}{\varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}} = \arg\text{th}\, \frac{y\sqrt{a}}{ax+b};$$

cet argument est nul si l'on a

$$y = 0, \qquad ax + b = \varepsilon'\sqrt{b^2 - ac} \qquad \text{ou} \qquad x = x'',$$

c'est-à-dire au point A"; l'intégrale (4') est donc bien identique à l'intégrale (2'). La formule

$$(6') \qquad I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \arg\text{sh}\, \frac{y\sqrt{a}}{\varepsilon'\sqrt{b^2 - ac}}$$

est intéressante.

On déduit facilement (1', 1") de (3'), en écrivant

$$2 \arg\text{th}\, X \qquad \text{ou} \qquad \arg\text{th}\, \frac{2X}{1 + X^2} = \arg\text{th}\, \frac{ax+b}{y\sqrt{a}};$$

les deux valeurs de X ont pour produit 1, et il faut prendre la plus petite en valeur absolue, ce qui donne

$$X = \frac{y\sqrt{a} - \varepsilon\sqrt{ac - b^2}}{ax + b}.$$

On déduirait de même (2') de (4'), mais il vaut mieux faire le contraire.

14. Revenons à l'emploi du paramètre t. La conique étant une hyperbole, le point fixe C de coordonnées α et β peut être rejeté à l'infini, dans la direction dont le coefficient angulaire est $-\sqrt{a}$, par exemple; on exprime alors x et y en fonction rationnelle de l'ordonnée à l'origine d'une sécante variable parallèle à une asymptote.

La formule générale du n° 9 est, avec $t^2 < a$ par exemple,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg \operatorname{th} \frac{t}{\sqrt{a}}, \qquad \left(\frac{y-\beta}{x-\alpha} = t\right);$$

si l'on veut déduire de cette formule générale la formule particulière qu'on a en vue, on écrira

$$y = tx + (\beta - \alpha t),$$

on désignera par z l'ordonnée à l'origine de cette sécante variable

$$z = \beta - \alpha t,$$

on remplacera t par $\frac{\beta - z}{\alpha}$, et l'on aura à faire α et β infinis, sous la condition

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = -\sqrt{a}.$$

Il faut toutefois employer ici un artifice analogue à celui que l'on emploie pour déduire de l'intégrale

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \mathrm{C}$$

l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$ relative au cas $m = -1$; on écrit dans ce cas

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1} - 1}{m+1} + \mathrm{C}',$$

de telle sorte que l'expression prenne la forme illu-

soire $\frac{0}{0}$ pour $m = -1$ et l'on fait alors tendre m vers -1; or on sait que l'expression $\frac{x^h - 1}{h}$, lorsque h tend vers o, tend elle-même vers Lx.

On écrit de même ici, en supposant qu'on a primitivement $t^2 < a$,

$$\frac{I\sqrt{a}}{2} = \left(\arg \text{th} \frac{\beta - z}{\alpha\sqrt{a}} - \arg \text{th} \frac{\beta}{\alpha\sqrt{a}}\right) + C',$$

de telle sorte que l'expression prenne la forme illusoire $\infty - \infty$ ponr α et β infinis avec $\frac{\beta}{\alpha} = -\sqrt{a}$; on remplace la différence d'arguments par un argument unique, on fait α et β infinis avec $\frac{\beta}{\alpha} = -\sqrt{a}$, et l'on trouve

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \arg \text{th} \frac{z\sqrt{a}}{z\sqrt{a} + 2b} + C';$$

si l'on suppose que l'on a d'abord $t^2 > a$, on a coth au lieu de th.

Les formules

$$\arg \text{th}\, x = \frac{1}{2} L \frac{1 + x}{1 - x}, \qquad \arg \coth x = \frac{1}{2} L \frac{x + 1}{x - 1},$$

permettent d'écrire

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} L \left| \frac{b + z\sqrt{a}}{b} \right| + C';$$

et c'est à cette formule que l'on arrive par un calcul direct. On coupe la conique par une parallèle à une asymptote, $y = -x\sqrt{a} + z$, ce qui donne

$$ax^2 + 2bx + c = ax^2 - 2xz\sqrt{a} + z^2;$$

on a en différentiant sous cette forme

$$(b + z\sqrt{a})\, dx = (-x\sqrt{a} + z)\, dz = y\, dz,$$

et par suite

$$I = \int \frac{dx}{y} = \int \frac{dz}{b + z\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} L \left| b + z\sqrt{a} \right| + C'',$$

comme ci-dessus [1].

En remplaçant z par $y - tx$, c'est-à-dire $y + x\sqrt{a}$, on a donc

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \times L \left| ax + b + y\sqrt{a} \right| + C'',$$

et l'on en déduit les formules $[1', 1'']$ et $[2']$, dont les seconds membres sont nuls en même temps que les arguments des formules $(1', 1'')$ et $(2')$. Il est facile de vérifier directement que les expressions sous le signe L dans les formules $[1', 1'']$ et $[2']$ sont positives : en effet, selon que l'on a $b^2 - ac < 0$ ou $b^2 - ac > 0$, la quantité

$$(ax + b) + y\sqrt{a} \quad \text{ou} \quad (ax + b) + \varepsilon\sqrt{(ax + b)^2 + (ac - b^2)}$$

a le signe de son second terme ou celui de son premier terme ; or, dans le premier cas, on la divise par ε, ce qui donne un résultat positif ; dans le second cas, on la divise par ε' qui est le signe commun des différences $x - x'$, $x - x''$, $x - \frac{-b}{a}$, ou encore le signe de $ax + b$, et le résultat est toujours positif.

---

[1] L'asymptote ayant pour équation $y = -\frac{ax + b}{\sqrt{a}}$, on pourrait prendre l'équation de la parallèle sous la forme

$$y = -\frac{ax + b}{\sqrt{a}} + u,$$

ce qui conduit à l'intégrale $\int \frac{du}{u\sqrt{A}}$.

15. Dans le cas particulier où l'on veut intégrer

$$\int \frac{dx}{\varepsilon\sqrt{x^2+k}},$$

le calcul direct du n° 14 est très simple. On coupe la conique $y^2 = x^2 + k$ par la droite $y = -x + z$, ce qui donne

$$k = -2xz + z^2;$$

on a en différentiant

$$z\,dx = (z-x)\,dz = y\,dz, \qquad \frac{dx}{y} = \frac{dz}{z};$$

on a par suite

$$\int \frac{dx}{\varepsilon\sqrt{x^2+k}} = \mathrm{L}\left|x + \varepsilon\sqrt{x^2+k}\right| + \mathrm{C}''.$$

En faisant $k = +1$, ou encore $k = -1$ avec $x > 0$, on a les formules écrite au début du n° 12.

16. La formule

$$\int_0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

écrite au début du n° 7, est connue par la différentiation de la fonction $\arcsin x$; on l'obtiendrait naturellement en posant $x = \sin\varphi$. Les formules écrites au début du n° 12,

$$\int_0 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arg\,sh} x = \mathrm{L}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$

$$\int_1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arg\,ch} x = \mathrm{L}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),$$

sont de même connues par la différentiation des fonctions

$$\operatorname{arg\,sh} x \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{L}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad \ldots;$$

on les obtiendrait naturellement sous la première forme en posant

$$x = \operatorname{sh} u \qquad \text{ou} \qquad x = \operatorname{ch} u.$$

On vient de voir comment on arrive directement aux expressions logarithmiques de ces intégrales ; on va voir qu'on y est également conduit en introduisant un angle θ qui est le complément de l'amplitude hyperbolique de l'argument u.

Pour la première intégrale, on posera donc

$$x = \cot\theta \qquad (0 < \theta < \pi);$$

l'intégrale devient

$$-\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int \frac{d\cot\frac{\theta}{2}}{\cot\frac{\theta}{2}} = \mathrm{L}\cot\frac{\theta}{2} = \mathrm{L}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

On introduit ici la variable auxiliaire $\cot\frac{\theta}{2} = z$, de sorte que l'on pose en somme

$$x = \cot\theta = \frac{z^2-1}{2z};$$

cela donne, en désignant $\sqrt{x^2+1}$ par y,

$$y + x = z,$$

et l'on retombe sur la méthode du n° 15.

De même pour obtenir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

avec $x > 0$, on posera

$$x = \operatorname{coséc}\theta \qquad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right);$$

l'intégrale devient

$$-\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int \frac{d \cot \frac{\theta}{2}}{\cot \frac{\theta}{2}} = \mathrm{L} \cot \frac{\theta}{2} = \mathrm{L}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

On introduit encore ici la variable auxiliaire $\cot \frac{\theta}{2} = z$, de sorte que l'on pose en somme

$$x = \operatorname{cosec} \theta = \frac{z^2 + 1}{2z};$$

cela donne, en désignant $\sqrt{x^2 - 1}$ par y,

$$y + x = z,$$

et l'on retombe sur la méthode du n° **15**.

17. Voici une dernière remarque. Soit

$$y = \sqrt{x^2 - 1},$$

et considérons, comme au n° **2**, le double $2\,\mathrm{S}$ de l'aire du secteur hyperbolique $\mathrm{A}\Omega\mathrm{M}$; on a

$$2\, d\mathrm{S} = x\, dy - y\, dx;$$

or, à cause de $x^2 - y^2 = 1$, on a aussi

$$0 = x\, dx - y\, dy;$$

on a donc, en additionnant,

$$2\, d\mathrm{S} = (x - y)\, d(x + y) = \frac{d(x + y)}{x + y},$$
$$2\mathrm{S} = \mathrm{L}(x + y),$$

l'aire S étant nulle pour $x = 1$, $y = 0$. C'est la formule de Mercator pour le double de l'aire du secteur hyperbolique, et j'en ai donné la démonstration précédente dans une Note relative aux fonctions hyperboliques. (*N. A.*, 1910, p. 481). Or on a vu au n° **2** que l'aire

doublée 2 S a aussi pour expression $\int \frac{dx}{y}$; on a donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \mathrm{L}(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

18. Soit toujours

$$y^2 = x^2 - 1.$$

L'intégrale $\mathrm{I} = \int \frac{dx}{y}$ représente le double de l'aire du secteur $\mathrm{M}_0\Omega\mathrm{M}$ de l'hyperbole équilatère de la figure 6, et l'on a

$$2\mathrm{S} = 2\int \frac{dt}{1 - t^2} = \mathrm{L}\frac{1 + t}{1 - t} \qquad \left(\frac{y - \beta}{x - \alpha} = t\right).$$

D'autre part si l'on mène $\Omega\mathrm{P}$ parallèle à CM, et si l'on désigne par x' et y' les coordonnées du point P, on a, pour l'aire S' du secteur $\mathrm{A}''\Omega\mathrm{P}$,

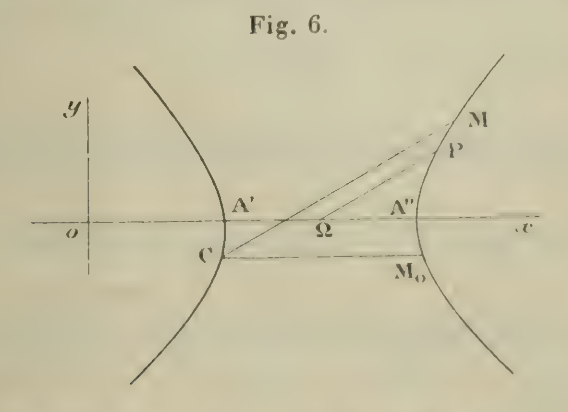
$$2\mathrm{S}' = \mathrm{L}(x' + y') = -\mathrm{L}(x' - y'),$$

d'où

$$2\mathrm{S}' = \frac{1}{2}\mathrm{L}\frac{x' + y'}{x' - y'} = \frac{1}{2}\mathrm{L}\frac{1 + t}{1 - t}.$$

L'aire $\mathrm{A}''\Omega\mathrm{P}$ est donc moitié de l'aire $\mathrm{M}_0\Omega\mathrm{M}$. La généralisation est immédiate, et l'aire $\mathrm{P}\Omega\mathrm{P}'$ est moitié

Fig. 6.



de l'aire $\mathrm{M}\Omega\mathrm{M}'$, les droites $\Omega\mathrm{P}$ et $\Omega\mathrm{P}'$ étant parallèles à CM et à CM'; les points M et M' étant donnés, l'aire

$P\Omega P'$ conserve ainsi une valeur constante quand le point C se déplace sur la courbe. Ce théorème est l'analogue du théorème de l'angle inscrit; on en trouverait une démonstration dans la Note relative aux fonctions hyperboliques dont il est question plus haut.

NOTE I.

Lorsque le trinome $ax^2 + 2bx + c$ a des racines, de sorte que l'on a

$$y = \varepsilon\sqrt{a(x - x')(x - x'')},$$

l'application d'un procédé qui s'emploie lorsque le nombre des facteurs binomes est quelconque (HERMITE, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, p. 15, 294, 304) conduit à écrire

$$|y| = |x - x'|\sqrt{\frac{a(x - x'')}{(x - x')}}$$

et à poser

$$\frac{a(x - x'')}{x - x'} = t^2;$$

on a ainsi, en disposant du signe de t,

$$\frac{y}{x - x'} = t,$$

et l'on retombe sur la méthode générale avec $\alpha = x'$, $\beta = 0$.

On s'explique ainsi comment on a obtenu au nº 6

(2) $$I_2 = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \times 2 \operatorname{arc\,tang} \varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{x - x''}{x - x'}}$$

et au nº 10

(2') $$I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \times 2 \operatorname{arg\,th} \varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{x - x''}{x - x'}}.$$

NOTE II.

Considérons la conique représentée par l'équation générale

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

et soit S *l'aire du secteur* $M_0 \Omega M$, Ω *étant le centre de la conique.* La relation

$$f'_x\, dx + f'_y\, dy = 0$$

donne, en désignant par p et q les coordonnées du point Ω,

$$\frac{-dx}{f'_y} = \frac{dy}{f'_x} = \frac{(x-p)\,dy - (y-q)\,dx}{(x-p)f'_x + (y-q)f'_y};$$

le dénominateur du dernier rapport peut s'écrire

$$-(pf'_x + qf'_y + f'_z) \quad \text{ou} \quad -(xf'_p + yf'_q + f'_r),$$

et il se réduit à $-f'_r$, le point Ω étant le centre de la courbe. On a donc

$$\frac{2\,dS}{f'_r} = \frac{dx}{f'_y} = \frac{-dy}{f'_x},$$

ou, avec les notations habituelles,

$$(1) \qquad 2\,dS = \frac{\Delta}{\delta}\,\frac{dx}{f'_y} = \ldots,$$

la notation f' représentant une demi-dérivée.

Soit

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha} = t,$$

α et β étant les coordonnées d'un point C de la conique. L'équation de la courbe peut s'écrire

$$a(x-\alpha)(x+\alpha) + 2b[(x-\alpha)y + \alpha(y-\beta)]$$
$$+ c(y-\beta)(y+\beta) + 2d(x-\alpha) + 2e(y-\beta) = 0,$$

et l'on a, en divisant par $x - \alpha$,

$$a(x + \alpha) + 2b(y + \alpha t) + c(y + \beta)t + 2d + 2et = 0,$$

ou

$$a(x+\alpha) + 2b(\beta+tx) + c[2\beta t + (x-\alpha)t^2] + 2d + 2et = 0;$$

on a donc

$$dx(a + 2bt + ct^2) + 2\,dt(bx + cy + e) = 0.$$

La formule (1) prend alors la forme suivante :

$$S = -\frac{\Delta}{\delta}\int_0 \frac{dt}{a + 2bt + ct^2}.$$

[I13bα]

SUR UN THÉORÈME CONNU D'ARITHMÉTIQUE;

Par M. R. BRICARD.

---

1. Ce théorème est le suivant : *Tout nombre premier de la forme $4q + 1$ est somme de deux carrés.* La démonstration très élémentaire que voici utilise, d'une manière peut-être nouvelle, les considérations géométriques que plusieurs auteurs et surtout Minkowski ont introduites avec succès dans la Théorie des nombres, sous une forme d'ailleurs bien plus générale (*voir* par exemple les *Leçons* de M. A. Châtelet, p. 108).

2. Soit p le nombre premier considéré. On déduit facilement du théorème de Wilson, comme on sait, la congruence

$$(1) \qquad m^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

en posant

$$m = \left(\frac{p-1}{2}\right)!.$$

Multiplions successivement par $1^2, 2^2, \ldots, (p-1)^2$ les deux membres de la congruence (1) et désignons par x_i le reste minimum de mi (mod p), de sorte qu'on a

$$x_i \equiv mi \pmod{p} \qquad (0 < x_i < p).$$

On formera ainsi les $p-1$ congruences

$$(2) \qquad x_i^2 + i^2 \equiv 0 \pmod{p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Prenons maintenant deux axes rectangulaires et marquons les $p-1$ points M_i, de coordonnées x_i, i. Chacun d'eux a son abscisse et son ordonnée au moins égales à 1 et au plus égales à $p-1$. Tous ces points sont donc contenus (au sens large) à l'intérieur d'un carré C de côté égal à $p-2$.

Le carré de la distance $M_i M_j$ *de deux quelconques de ces points est divisible par p.* En effet, si l'on désigne par d_{ij} ce carré, on a

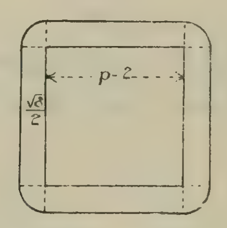
$$(3) \quad d_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (i-j)^2 \equiv (mi - mj)^2 + (i-j)^2$$
$$= (i-j)^2(m^2+1) \equiv 0 \pmod{p},$$

d'après la congruence (1).

Soit maintenant δ la plus petite des quantités d_{ij}. Nous allons montrer que δ est plus petit que $2p$, du moins si p dépasse un certain nombre. En effet, décrivons les $p-1$ cercles Γ_i ayant pour centres les points M_i et pour rayon commun $\frac{\sqrt{\delta}}{2}$. Tous ces cercles sont au plus tangents et n'ont pas de parties communes. Menons d'autre part (*fig.* 1), extérieurement au carré C, des parallèles à ses côtés, à une distance égale à $\frac{\sqrt{\delta}}{2}$, et raccordons-les par quatre quarts de cercle, ayant leurs

centres aux sommets du carré. Tous les cercles Γ_i sont contenus à l'intérieur de la région limitée par le con-

Fig. 1.



tour ainsi constitué. La somme de leurs aires est donc inférieure à l'aire de cette région, ce qui fournit immédiatement l'inégalité

$$(p-1)\pi\frac{\delta}{4} < (p-2)^2 + 4(p-2)\frac{\sqrt{\delta}}{2} + \pi\frac{\delta}{4}.$$

On peut faire passer le dernier terme du second membre dans le premier et diviser ensuite par $p-2$. Il vient ainsi :

$$\pi\frac{\delta}{4} < p - 2 + 2\sqrt{\delta},$$

et, *a fortiori*,

$$\frac{3\delta}{4} < p + 2\sqrt{\delta},$$

ou

$$\delta - \frac{8}{3}\sqrt{\delta} - \frac{4}{3}p < 0.$$

L'équation du second degré en $\sqrt{\delta}$, obtenue en annulant le premier membre, a ses racines de signes contraires. Il faut donc que $\sqrt{\delta}$ soit inférieur à la racine positive, ce qui donne

$$\sqrt{\delta} < \frac{4}{3} + \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{3}p}.$$

Le second membre sera inférieur à $\sqrt{2p}$, si l'on a

$$\frac{16}{9} + \frac{4}{3}p < \left(\sqrt{2p} - \frac{4}{3}\right)^2 = 2p - \frac{8}{3}\sqrt{2p} + \frac{16}{9},$$

ce qui se réduit à

$$\frac{2}{3}p > \frac{8}{3}\sqrt{2p},$$

ou

$$p > 32.$$

En résumé, il existe un nombre δ, somme de deux carrés et multiple de p, d'après la congruence (3), et inférieur à $2p$, si p est plus grand que 32. Ce multiple est donc p lui-même.

Nous avons ainsi démontré la proposition rappelée au début de cette Note, pour les nombres p supérieurs à 32. Pour les nombres inférieurs (5, 13, 17, 29) la vérification est immédiate.

La même démonstration, convenablement modifiée, permet d'établir les théorèmes analogues et bien connus aussi relatifs aux représentations de certains nombres premiers par les formes $x^2 + 2y^2$, $x^2 + 3y^2$, et même par la forme indéfinie $x^2 - 2y^2$. Voici l'esquisse de la démonstration pour ce dernier cas :

Soit p un nombre premier dont 2 est résidu quadratique (nombre de la forme $8q + 1$ ou de la forme $8q + 7$). On considérera des points M_i de coordonnées x_i, $\sqrt{2}\,i$ $(i = 1, \ldots, p-1)$, tels que

$$x_i^2 - 2i^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

et tous contenus à l'intérieur d'un rectangle de côtés $p - 2$, $\sqrt{2}(p - 2)$; pour deux quelconques d'entre eux, on a

$$\delta_{ij} = (x_i - x_j)^2 - 2(i - j)^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Par le même raisonnement géométrique que précédemment, on reconnaît que, si p est plus grand qu'un certain nombre, on a pour un choix convenable des nombres i et j,

$$(x_i - x_j)^2 + 2(i - j)^2 < 2p.$$

On en déduit

$$|\delta_{ij}| < 2p$$

et par suite

$$|\delta_{ij}| = p.$$

Par conséquent p est représentable par l'une des formes $x^2 - 2y^2$, $-x^2 + 2y^2$. On sait d'ailleurs que ces formes sont équivalentes, en vertu de l'identité

$$x^2 - 2y^2 = 2(x+y)^2 - (x+2y)^2.$$

[L¹2c]

SUR LES COURBES AUTOPOLAIRES;

Par M. A. MYLLER.

Dans un article publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1894), M. P. Appell a étudié les courbes autopolaires, c'est-à-dire les courbes qui coïncident avec leurs polaires réciproques par rapport à une conique directrice donnée. Il a montré en particulier que toute *courbe autopolaire* peut être considérée comme enveloppe d'une série de *coniques autopolaires*.

En me rapportant à ce résultat je me propose d'établir quelques propriétés de ces courbes d'où il résulte un procédé géométrique simple pour les construire.

Soient

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 - 1 = 0$$

l'équation de la conique directrice et

$$(2) \qquad A\alpha x + B\beta y - 1 = 0$$

l'équation d'une droite arbitraire. Soient E, F les points de rencontre de la droite (2) avec (1) et P le

pôle (α, β) de cette droite. Considérons la conique tangente en E et F à la conique (1) et telle que ses rayons de courbure en E et F soient égaux et de directions contraires à ceux de (1) dans les mêmes points. L'équation de cette conique qu'on obtient sans difficulté est

$$(3)\quad 2(A\alpha x + B\beta y - 1)^2 - (A\alpha^2 + B\beta^2 - 1)(Ax^2 + By^2 - 1) = 0.$$

On constate que cette équation coïncide avec l'équation connue des coniques autopolaires par rapport à (1).

Laissons le point P se mouvoir sur une courbe donnée

$$(4)\qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0.$$

La conique (3) enveloppera alors une courbe autopolaire

$$(5)\qquad f(x, y) = 0.$$

Nous allons chercher les points de contact de (3) avec l'enveloppe (5). Ces points sont à l'intersection de (3) avec la conique suivante obtenue en différentiant l'équation (3) :

$$\begin{aligned} &2(A\alpha x + B\beta y - 1)(Ax\,d\alpha + By\,d\beta) \\ &\quad - (Ax^2 + By^2 - 1)(A\alpha\,d\alpha + B\beta\,d\beta) = 0. \end{aligned}$$

Par ces quatre points passe le faisceau

$$\begin{aligned} &2(A\alpha x + B\beta y - 1)[A\alpha x + B\beta y - 1 + \lambda(Ax\,d\alpha + By\,d\beta)] \\ &\quad - (Ax^2 + By^2 - 1)[A\alpha^2 + B\beta^2 - 1 + \lambda(A\alpha\,d\alpha + B\beta\,d\beta)] = 0. \end{aligned}$$

En prenant

$$\lambda = -\frac{A\alpha^2 + B\beta^2 - 1}{A\alpha\,d\alpha + B\beta\,d\beta},$$

on obtient deux droites qui passent par les points de

contact de (3) avec son enveloppe (5). L'une est la droite (2) comme il était à prévoir, car la conique (1) est une partie de l'enveloppe (5); l'autre a l'équation

$$(6)\quad A[(1-B\beta^2)\,d\alpha+B\alpha\beta\,d\beta]\,x \\ +B[A\alpha\beta\,d\alpha+(1-A\alpha^2)\,d\beta]\,y-A\alpha\,d\alpha-B\beta\,d\beta=0.$$

Cette droite coupe (3) en deux points G et H qui appartiennent à la courbe autopolaire (5) et se correspondent dans la transformation.

La droite (6) est caractérisée géométriquement par les deux propriétés suivantes qu'on déduit facilement :

1° *Elle passe par le point* P;

2° *Elle est conjuguée harmonique de la tangente en* P *à la courbe* (4) *par rapport aux deux tangentes* PE *et* PF *menées de* P *à la conique directrice* (1).

Déterminons les tangentes en G et H à la courbe (3). Dans ce but, prenons les droites PE et PF comme nouveaux axes des coordonnées Ox et Oy. Soient K et L les points de rencontre de la tangente en P à la courbe (4) avec la conique directrice et T l'intersection de la même tangente avec la corde de contact EF.

L'équation (1) de la conique directrice prend dans le nouveau système d'axes la forme suivante :

$$(7)\qquad a^2x^2+2mxy+b^2y^2+2ax+2by+1=0,$$

et l'équation (3) de la conique autopolaire tangente en E et F devient

$$(8)\quad a^2x^2+2(2ab-m)xy+b^2y^2+2ax+2by+1=0.$$

Soit

$$y=kx$$

l'équation de la tangente PKL; celle de la droite PGH

sera alors

$$y = -kx,$$

L'équation du faisceau de coniques tangentes en G et H à la conique (8) est

$$a^2x^2 + 2(2ab - m)xy + b^2y^2 + 2ax + 2by + 1 - \rho(y + kx)^2 = 0,$$

ou encore

$$a^2x^2 + 2(2ab - m - 2k\rho)xy + b^2y^2 + 2ax + 2by + 1 - \rho(y - kx)^2 = 0.$$

En prenant

$$\rho = \frac{ab - m}{2k} = \theta^2,$$

on obtient l'équation suivante des deux tangentes TG et TH qui passent par le point T

$$(ax + by + 1)^2 - \theta^2(y - kx)^2 = 0.$$

Soit Q le point d'intersection de la droite PGH avec EF. L'équation des tangentes QK et QL s'obtient de la même manière et elle est

$$(ax + by + 1)^2 - \theta^2(y + kx)^2 = 0,$$

où θ a la même signification que précédemment.

Les points G, H, K, L étant déterminés comme intersections des droites dont nous avons trouvé les équations, on peut alors facilement écrire les équations des droites HK, GL, GK, HL qui sont les suivantes :

(HK) $\quad ax + (b - 2\theta)y + 1 = 0,$

(GL) $\quad ax + (b + 2\theta)y + 1 = 0,$

(GK) $\quad (a - 2k\theta)x + by + 1 = 0,$

(HL) $\quad (a + 2k\theta)x + by + 1 = 0.$

On constate que les droites HK et GL passent par le point E, les droites GK et HL par le point F.

Ce dernier résultat nous indique la construction géométrique simple pour déterminer les point G et H de la courbe (5) ainsi que les tangentes quand on donne le point P de la courbe (4).

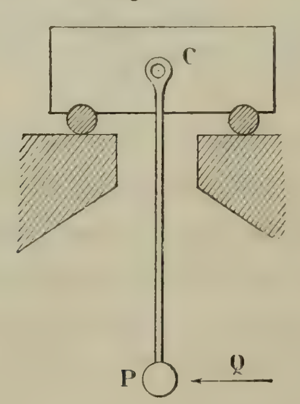
CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Cours. — *Principe de d'Alembert, principe de Gauss ou de la moindre contrainte; équation de Lagrange.*

Problème. — *Un chariot* C *roulant sur un plan horizontal supporte l'axe de suspension d'un pendule* P; *cet axe de*

Fig. 1.

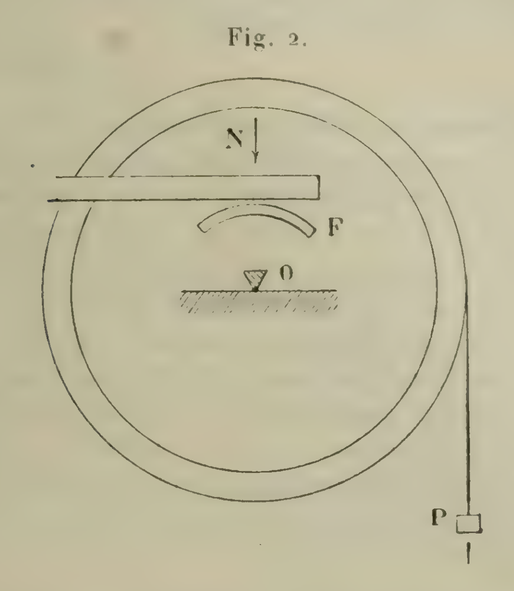


suspension est parallèle aux axes des deux paires de roues, dont les masses sont négligeables.

Étudier le mouvement de ce système à deux degrés de liberté supposé soustrait à toutes résistances passives. Étudier en particulier le cas où l'équilibre primitif vient à être rompu par une force de percussion appliquée au centre de percussion du pendule.

Étudier d'une part le cas des petites oscillations et le cas où la rotation du pendule continuera toujours dans le

Fig. 2.



même sens, charge minima μ *du chariot nécessaire à l'exécution de ce dernier mouvement, réactions entre le pendule et le chariot.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Sur une roue lestée de* 2^{m} *de diamètre formant pendule et par l'intermédiaire de frottoirs* F *cylindriques, concentriques à l'axe de la roue et de rayon égal à* $202^{mm},30$, *on a transmis au moyen de deux leviers pesants une pression normale et verticale* N *de* $13^{kg},600$.

Cinq oscillations complètes avant l'extinction du mouvement ont été observées; l'écart de la semi-amplitude initiale u_0 *et de la semi-amplitude finale* u_{10} *observée à la fin de la cinquième vibration complète correspond à un arc de la grande circonférence de la roue dont l'étendue comprend* 72^{mm}.

D'autre part, à la même température, on a observé qu'un fil tendu le long de la circonférence externe de la roue par un poids P *de* 2^{kg} *pendant librement d'un seul côté de la roue, produit une déviation angulaire de la roue qui s'accuse sur son pourtour par un déplacement linéaire de* $14^{mm},042$.

Déduire de ces deux expériences la valeur numérique

du coefficient f du frottement qui a éteint les oscillations de la roue dans la première expérience.

Le frottement sur l'arête O *du couteau de la roue est tout à fait négligeable et négligé.*

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Sur un système rigide* S *tournant autour d'un axe vertical* U *avec une vitesse angulaire constante* ω *est articulée, par un axe* A_1, *perpendiculaire à la direction de* U, *et au pied de leur plus courte distance, une barre homogène pesante dont la longueur est perpendiculaire à son axe d'articulation; à l'extrémité inférieure de cette barre et sur un axe d'articulation* A_2 *parallèle à* A_1 *est articulée une seconde barre homogène pesante, perpendiculaire à ce nouvel axe d'articulation.*

On néglige toutes résistances passives et l'on demande, connaissant les longueurs et les densités linéaires des deux barres :

1° *La figure d'équilibre relatif du système des deux barres par rapport au système* S;

2° *Les petits mouvements relatifs du système autour de sa position relative d'équilibre.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On a taillé deux cylindres de révolution, l'un en sapin, l'autre en liège.*

A quelles conditions doivent satisfaire les dimensions de l'un et de l'autre pour que chacun d'eux puisse d'une manière stable flotter sur l'eau en conservant vertical son axe de révolution.

Par rapport à l'eau, les densités du sapin et du liège sont respectivement

$$0,93 \quad \text{et} \quad 0,24.$$

(Novembre 1912.)

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une barre sans masse* AB *est fixée par une de ses extrémités* A *de telle façon qu'elle ne*

puisse se déplacer que dans un plan horizontal. A l'extrémité libre B *on a suspendu à la Cardan un gyroscope, de façon qu'un point fixe de son axe se trouve au point* B, *tandis que l'axe peut prendre dans l'espace toutes les orientations possibles.*

1° *Montrer que les théorèmes généraux de la Mécanique permettent d'écrire trois intégrales premières des équations du mouvement de ce système. Écrire ces intégrales dans le cas général.*

2° *Adjoindre à ces trois équations le nombre d'équations nécessaire et suffisant pour déterminer le mouvement.*

3° *Étudier complètement le mouvement dans le cas particulier suivant : le point* B *coïncide avec le centre de gravité* G *du gyroscope; à l'instant initial, le gyroscope a une position quelconque. Effectuer les intégrations. Plus particulièrement, on supposera qu'à l'instant initial le gyroscope occupe une position quelconque, mais qu'il est animé d'une vitesse angulaire* r_0 *autour de son axe, tandis que le point* G *est lancé horizontalement avec une vitesse* v.

Données : $AB = a$; $BG = b$ ($b = 0$ *dans* 3°); *masse du gyroscope* $= m$.

Épreuve pratique. — *On emploie en Allemagne le procédé suivant pour déterminer la flèche des fils métalliques à grande portée : on écarte le fil de sa position d'équilibre, et on le laisse osciller sous l'action de la pesanteur.*

1° *Calculer la flèche en fonction du nombre* n *d'oscillations simples à la minute; on suppose que le fil ne se déforme pas en oscillant et se comporte par conséquent comme un corps solide; on suppose les deux points d'attache dans un même plan horizontal. On appellera* $2a$ *la portée,* f *la flèche. On assimilera tout d'abord la figure d'équilibre à une parabole, puis, dans la suite du calcul, on négligera les puissances de* f *supérieures à la première.*

Application numérique : $n = 83$. *On suppose ce nombre exact à une unité près : à quelle approximation convient-il de calculer* f?

2° *Calculer la tension maximum en supposant* $2a = 50^{m}$, *et la masse spécifique du fil égale à* 7,6.

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un disque plein homogène est assujetti à rouler sans glisser sur une droite horizontale. Au début du mouvement, sa vitesse est nulle et son plan est vertical. On suppose le disque infiniment plat et l'on néglige le frottement.*

Le disque est soumis à l'action d'une force, parallèle à l'horizontale sur laquelle se meut le disque. Cette force est appliquée en un point fixe du disque, et elle dépend uniquement de l'angle θ *dont celui-ci a tourné depuis l'instant initial. On la désignera par* $m\mathrm{P}(\theta)$.

1° *Montrer que l'étude du mouvement du disque se ramène aux quadratures.*

2° *On suppose* $\mathrm{P}(\theta)$ *donné par le développement en série*

$$\mathrm{P}(\theta) = a_0 + a_1 \cos(\theta + \varphi_1) + a_2 \cos(2\theta + \varphi_2) + \ldots + a_n \cos(n\theta + \varphi_n) + \ldots.$$

Quelle relation doit-il y avoir entre les coefficients de cette série pour que la vitesse reprenne sa valeur après un tour complet du disque? Montrer qu'alors le mouvement est périodique.

3° *On suppose le disque soumis en outre à une force, également parallèle à la droite donnée, appliquée au centre, et proportionnelle au carré de la vitesse de translation. Étudier complètement le mouvement en supposant la force* $\mathrm{P}(\theta)$ *égale à* $\mathrm{A}\sin\theta$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère une portion de l'hélicoïde gauche à plan directeur*

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$
$$z = a\theta$$

limitée : 1° par le cylindre d'axe Oz *et de rayon* R; 2° *par deux plans passant par* Oz *et faisant entre eux l'angle* α.

Sur chaque élément, ds, de surface, agit une force pro-

portionnelle et normale à cet élément, proportionnelle au carré de sa vitesse et au sinus de l'angle i que fait le plan tangent avec le plan $x\mathrm{O}y$.

Quelle sera la puissance nécessaire pour faire tourner la surface autour de $\mathrm{O}z$ *avec une vitesse angulaire constante*, ω, *en supposant que, dans ce mouvement, les forces appliquées aux éléments de surface agissent comme résistances ?*

Application numérique : $R = 200$ (C.G.S); *pas de l'hélicoïde* $= 100\pi$; $\alpha = 30^\circ$; $\omega = 100$ *tours à la minute.*

L'expression de la force est $kv^2 \sin i\, ds$, *et l'on a*

$$k = 8.10^{-5} (\text{C.G.S.}).$$

(Novembre 1912.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2194.

(1912, p. 336.)

On considère les hyperboles équilatères qui passent par les sommets de grand axe d'une ellipse donnée, et qui sont tangentes en un point variable de cette ellipse. Le lieu du centre de ces hyperboles est une quartique, podaire de centre d'ellipse. (Dr W. Gaedecke.)

Solution.

Par M. Parrod.

Soient A et A′ les sommets, M le point variable de l'ellipse. M′ un point voisin de M ; le centre de l'hyperbole est le deuxième point d'intersection O des deux cercles des neuf points des triangles AMM′ et A′MM′.

L'homothétie de centre M, rapport 2, nous donne les cercles tangents en A et A′ et passant par M, ils se coupent en O′ et O est le milieu de OO′.

L'axe radical MO′ rencontre AA′ en I milieu de AA′; lorsque M décrit l'ellipse, les deux rayons MA, MA′ sont homographiques; les centres ω, ω' des deux cercles précédents décrivent sur les perpendiculaires en A et A′ à AA′ deux divisions homographiques; la droite $\omega O \omega'$ enveloppe une ellipse de centre I et le point O décrit une quartique, podaire du centre de l'ellipse enveloppe de $\omega\omega'$.

Autres solutions par MM. Barisien, Bouvaist, Klug, T. Ono.

2195.

(1912, p. 336.)

La tangente en un point variable de l'ellipse de Frégier d'une ellipse donnée rencontre cette ellipse en A *et* B. *L'aire des segments elliptiques limités par la corde* AB *est constante.* (W. Gaedecke.)

Solution.

Par M. R. Bouvaist.

Une ellipse donnée et son ellipse de Frégier sont homothétiques et concentriques, on peut donc les projeter suivant deux cercles concentriques, ce qui démontre la proposition.

Autres solutions par MM. Klug, T. Ono, Parrod.

2196.

(1912, p. 384.)

Une sécante quelconque d'une ellipse donnée rencontre l'ellipse de Frégier en deux points de Frégier u et u′ et l'ellipse donnée en b et c. Le cercle de diamètre bc rencontre l'ellipse donnée en deux points a et a′ qui correspondent aux points u et u′. (Dr W. Gaedecke.)

SOLUTION.

Par M. T. ONO, à Kagoshima.

Puisque les angles *bac* et *ba'c* sont droits, les deux points *u* et *u'* correspondent, par définition du point de Frégier, aux points *a* et *a'*.

Autres solutions par MM. BARISIEN, KLUG.

2197.

(1912, p. 384.)

Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation

$$z^6 + a z^5 + b z^4 + c z^3 + d z^2 + e z + f = 0$$

pour que le produit de trois des racines soit égal au produit des trois autres. (Dr W. GAEDECKE.)

SOLUTION.

Par M. PARROD.

L'équation pourra être mise sous la forme

$$(z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma)(z^3 + \alpha' z^2 + \beta' z + \gamma) = 0.$$

Identifions :

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' &= a, & \beta\beta' + (\alpha + \alpha')\gamma &= d, \\ \alpha\alpha' + \beta + \beta' &= b, & (\beta + \beta')\gamma &= e, \\ \alpha\beta' + \beta\alpha' + 2\gamma &= c, & \gamma^2 &= f; \end{aligned}$$

β et β' sont racines de l'équation

$$y^2 - \frac{e}{\gamma} y + d - a\gamma = 0,$$

α et α' sont racines de l'équation

$$x^2 - ax + b - \frac{e}{\gamma} = 0$$

et l'on a

$$\alpha\beta' + \beta\alpha' = c - 2\gamma$$

ou

$$(\alpha + \alpha')(\beta + \beta') - (\alpha - \alpha')(\beta - \beta') = 2c - 4\gamma,$$
$$(\alpha - \alpha')^2(\beta - \beta')^2 = [2c - 4\gamma - (\alpha + \alpha')(\beta + \beta')]^2.$$

Remplaçons et simplifions, on a

$$\left(a^2 - 4b + 4\frac{e}{\gamma}\right)\left(\frac{e^2}{\gamma^2} - 4d + 4a\gamma\right) = \left(\frac{ae}{\gamma} - 2c + 4\gamma\right)^2.$$

Autres solutions par MM. Barisien, T. Ono.

2198.

(1912, p. 384.)

On considère le quadrilatère ABCD *inscriptible dans un cercle. Le triangle* ABC *est équilatéral, le côté* CD *est le côté du carré inscrit, et le côté* AD *est celui du dodécagone régulier inscrit. Montrer que l'aire du triangle formé par les trois diagonales de ce quadrilatère est les* $\frac{24}{13}$ *du carré qui a pour côté la distance des milieux des deux diagonales intérieures.* (E.-N. Barisien.)

Solution.

Par M. T. Ono, à Kagoshima.

Soit le rayon du cercle $= 1$, on a

$$AB = BC = CA = \sqrt{3}, \qquad CD = \sqrt{2},$$
$$AD = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, \qquad BD = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

Soient E et F les points d'intersection de AB, DC et de AD, BC; on voit

$$\widehat{AED} = 45^\circ, \qquad \widehat{DCB} = 75^\circ, \qquad \widehat{CDF} = 60^\circ, \qquad \ldots.$$

En prenant pour axes des coordonnées la droite BC et la perpendiculaire abaissée de A à cette droite, on trouve les coordonnées des points :

$$(D) \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ z = \frac{1+\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \qquad (E) \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{3}}{4}, \\ z = \frac{3(1+\sqrt{3})}{4}; \end{cases} \qquad (F) \begin{cases} x = \frac{3(2+\sqrt{3})}{2}, \\ y = 0. \end{cases}$$

et, par suite, les équations des trois diagonales :

$$(CA) \qquad 6x + 2\sqrt{3}\,y = 3\sqrt{3},$$

$$(BD) \qquad 2x - 2y = -\sqrt{3},$$

$$(EF) \qquad 6(1+\sqrt{3})\,x + 2(9-7\sqrt{3})\,y = 9(5+3\sqrt{3});$$

et enfin, les coordonnées des sommets du triangle PQR formé par ces trois diagonales :

$$(P) \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}, \\ y = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}; \end{cases} \qquad (Q) \begin{cases} x = \frac{21+2\sqrt{3}}{26}, \\ y = \frac{21+15\sqrt{3}}{26}; \end{cases} \qquad (R) \begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = \frac{3+\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

On trouve que l'aire du triangle PQR est égale à $\frac{6}{13}(5-2\sqrt{3})$, et celle du carré qui a pour côté la distance des milieux de CA et BD à $\frac{1}{4}(5-2\sqrt{3})$; donc, etc.

Autre solution par M. Bouvaist.

QUESTIONS.

2212. Si un rayon mobile OP d'un cercle de centre O coupe ce cercle en P et la tangente en un point fixe A du cercle

en N, le point de rencontre M des parallèles à OA et AN menées respectivement par N et P décrit une *conchoïde de Külp* (*Nouv. Ann.*, 1913, p. 193). Le point T où la tangente en M à la conchoïde coupe la tangente fixe AN au cercle peut être obtenu comme suit : U étant le point où cette tangente fixe est rencontrée par la tangente en P au cercle, si l'on porte sur le rayon OP le vecteur OV = PN, la droite OT est parallèle à UV. M. D'OCAGNE.

2213. Soient *c* et C une section droite et une section oblique d'un cylindre de révolution, tangentes entre elles en un point par lequel passe la génératrice G du cylindre. On sait que les droites rencontrant G à angle droit, qui s'appuient d'autre part sur la conique C, engendrent un cylindroïde (ou conoïde de Plucker). Démontrer que le volume du tronc de cylindre limité aux plans des sections *c* et C est double du volume du tronc de cylindroïde limité à sa directrice G et au plan de la section C. M. D'OCAGNE.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XIII, 4e SÉRIE.)

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*

Analyse mathématique.

Géométrie.

Mathématiques appliquées.

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Questions de concours.

Correspondance.

Bibliographie.

Divers.

Questions proposées.

Solutions de questions proposées.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.

(TOME XIII, 4e SÉRIE.)

50912 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

